

Diogo Soares Dória da Silva

MARTINGALS

Exercício 3.1: Se definirmos $N := \inf \{n; X_n > M\}$, temos que N é tempo de parada. Como X_n é, por hipótese, submartingal, então $X_{n \wedge N}$ é submartingal. Além disso,

$$\sup_n \xi_n^+ \geq \xi_{n \wedge N}^+ = (X_{n \wedge N} - X_{n \wedge N - 1})^+ \geq (X_{n \wedge N} - M)^+ \geq X_{n \wedge N}^+ - M.$$

$\downarrow$ óbvio $\downarrow$ definição de ξ_n $\downarrow$ $M \geq X_{N \wedge N - 1}$ $\downarrow$ imediato

Assim, temos que

$$X_{n \wedge N}^+ \leq M + \sup_n \xi_n^+.$$

Logo,

$$\mathbb{E}(X_{n \wedge N}^+) \leq \underbrace{\mathbb{E}(M)}_{\text{constante}} + \underbrace{\mathbb{E}(\sup_n \xi_n^+)}_{< +\infty, \text{ por hipótese}} < +\infty$$

Passando o supremo em n , temos que $\sup_n \mathbb{E}(X_{n \wedge N}^+) < +\infty$.

Dai, pelo Teorema da Convergência de Martingais, como $X_{n \wedge N}$ é submartingal e $\sup_n X_{n \wedge N} < +\infty$ (já que $\sup_n X_n < +\infty$),

$$X_{n \wedge N} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X,$$

com $\mathbb{E}|X| < +\infty$.

Exercício 3.2: Se definirmos X_n da seguinte forma:

Sejam $U_1, U_2, \dots \sim U[0,1]$, e independentes, então se

$$i) X_n = 0, \quad X_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{se } U_{n+1} > 1/2 \\ -1, & \text{se } U_{n+1} \leq 1/2 \end{cases};$$

$$ii) X_n \neq 0, \quad X_{n+1} = \begin{cases} 0, & \text{se } U_{n+1} > 1/n^2 \\ n^2 X_n, & \text{se } U_{n+1} \leq 1/n^2 \end{cases};$$

temos que

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n \cup X_n = 0] + \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n \cup X_n \neq 0]$$

↓
Partição
do espaço

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{n^2} + n^2 X_n \cdot \frac{1}{n^2} = X_n.$$

Logo, X_n é martingal. Sendo $a = \{-1, 0, 1\}$, temos, pelo lema de Borel-Cantelli, que $P(X_n = a \text{ infinitas vezes}) = 1$, já que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 - \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} 1 - \frac{\pi^2}{6} = +\infty,$$

e A_n são independentes (já que U_n são independentes, para $n \in \mathbb{N}$).

Por fim, como $P(X_n = \{-1, 0, 1\} \text{ infinitas vezes}) = 1$, então $\sup_n |X_n| < +\infty$ quase certamente, como queríamos.

Exercício 3.5: Definamos $X_m \in \{0, 1\}$ variáveis independentes,

com $P(X_m=1) = p_m$.

Assim, temos que

$$P(X_m=0, \forall m \geq 1) = P(X_1=0, X_2=0, \dots) = P(X_1=0) \cdot P(X_2=0) \cdot \dots$$

$\downarrow$
Independência
de X_m

$$= \prod_{m=1}^{+\infty} (1-p_m).$$

Como definimos
 $P(X_m=1)$

$(\Rightarrow)$ Por contraposição, suponha que $\sum_{m=1}^{+\infty} p_m < +\infty$. Então, existe M suficientemente grande tal que $\sum_{m=M}^{+\infty} p_m < 1$. Como $p_m \geq 0, \forall m \in \mathbb{N}$,

$$P(X_m=0, \forall m \geq M) = \prod_{m=M}^{+\infty} (1-p_m) > 0.$$

Como $p_m \neq 1$, é óbvio que $\prod_{m=1}^{M-1} (1-p_m) > 0$, logo

$$\prod_{m=1}^{+\infty} (1-p_m) = \underbrace{\prod_{m=1}^{M-1} (1-p_m)}_{>0} \cdot \underbrace{\prod_{m=M}^{+\infty} (1-p_m)}_{>0} > 0.$$

$(\Leftarrow)$ Se $\sum_{m=1}^{+\infty} p_m = +\infty$, pela independência das p_m 's,

$$P(X_m=1 \text{ infinitas vezes}) = 1, \text{ ou seja, } P(X_m=0, \forall m \geq 1) = 0$$

$$\Rightarrow \prod_{m=1}^{+\infty} (1-p_m) = 0, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

$\downarrow$
Pela igualdade do
início da questão

Exercício 3.6: Definamos $p_1 = P(A_1)$, e, para

$$n \geq 2, \quad p_n = P(A_n | \bigcap_{m=1}^{n-1} A_m^c).$$

Logo, temos que $\sum_{m=1}^{+\infty} p_m = p_1 + \sum_{m=2}^{+\infty} p_m = +\infty$. Supondo

$p_m \in [0, 1)$, pelo exercício 3.5, $\prod_{m=1}^{+\infty} (1-p_m) = 0$. Por hipótese

Se $p_m = 1$, para algum $m \in \mathbb{N}$, é óbvio que $\prod_{m=1}^{+\infty} (1-p_m) = 0$

também.

Agora, observe que $\prod_{m=1}^n (1-p_m)$ representa a probabilidade de

A_1 não acontecer, A_2 não acontecer, dado que A_1 não aconteceu, ...

A_n não acontecer, dado que $A_1, \dots, A_{n-1}$ não aconteceram, pela própria

definição de p_m .

Portanto, temos que $\prod_{m=1}^n (1-p_m) = P(\bigcap_{m=1}^n A_m^c)$. Agora, fa-

zendo $n \rightarrow +\infty$, temos que

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty} A_m^c\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{m=1}^n (1-p_m) = \prod_{m=1}^{+\infty} (1-p_m) = 0,$$

Feito no
início da
resolução

como queríamos.

Exercício 4.2: Definamos $K_n := \mathbb{1}_{\{M < n \leq N\}}$. Como

$\{M < n \leq N\} = \{M \leq n-1\} \cap \{N < n\}^c \in \mathcal{F}_{n-1}$, já que M e N são tempos de parada. Portanto, K_n é predizível.

Como, por hipótese, X_n é submartingal, e vimos que K_n é predizível, então

$$Y_n := (K \cdot X)_n = \sum_{m=1}^n K_m (X_m - X_{m-1}) = X_{N \wedge n} - X_{M \wedge n}$$

é submartingal.

Assim, para $n=N$, temos $Y_N = X_{N \wedge N} - X_{M \wedge N} \stackrel{M \leq N}{=} X_N - X_M. (*)$

Como Y_n é submartingal, $\mathbb{P}(N \leq K) = 1$ e N é tempo de parada, pelo Teorema 5.4.1,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{E}(Y_N) = \mathbb{E}(X_N - X_M) & = & \mathbb{E}(X_N) - \mathbb{E}(X_M) & \geq & \mathbb{E}(Y_0) = 0 \\ \downarrow (*) & & \downarrow \text{linearidade} & & \downarrow Y_n \text{ submartingal} \end{array}$$

Logo, $\mathbb{E}(X_N) \geq \mathbb{E}(X_M)$, como queríamos provar.

Exercício 4.4: Definamos $A := \{\max_{1 \leq m \leq n} |S_m| \leq x\}$ e $N := \inf\{m; |S_m| > x \text{ ou } m=n\}$. Do exercício 5.2.6, sabemos que $S_n^2 - s_n^2$ é um martingal. Além disso, por definição, N é um tempo de parada e $\mathbb{P}(N \leq n) = 1$. Daí, pelo Teorema 5.4.1, temos que $\mathbb{E}(S_1^2 - s_1^2) \leq \mathbb{E}(S_N^2 - s_N^2)$.

Além disso, $\text{Var}(\xi_m) = \mathbb{E}(\xi_m^2) - (\mathbb{E}(\xi_m))^2 = \mathbb{E}(\xi_m^2) = \sigma_m^2$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

$\downarrow$
 $\mathbb{E}(\xi_m) = 0$, Hipótese
 por hipótese e $\mathbb{E}(\xi_m^2) < \infty$

Pela independência das ξ_m s, $\text{Var}(S_n) = \sum_{m \leq n} \text{Var}(\xi_m)$

$$= \sum_{m \leq n} \sigma_m^2 = \Delta_n^2$$

↓
como
definido

$\text{Var}(\xi_m) = \sigma_m^2,$
 $\forall m \in \mathbb{N}$

continuando, temos que $\mathbb{E}(S_1^2 - \Delta_1^2) = \mathbb{E}(S_1^2) - \mathbb{E}(\Delta_1^2) = \Delta_1^2 - \Delta_1^2 = 0.$

↓
linearidade

↓
 $\mathbb{E}(S_1^2) = \Delta_1^2$

Além disso, temos que

$$\mathbb{E}(S_N^2 - \Delta_N^2) = \mathbb{E}((S_N^2 - \Delta_N^2) \mathbb{1}_A) + \mathbb{E}((S_N^2 - \Delta_N^2) \mathbb{1}_{A^c}).$$

↓
particionando
o espaço

Pela definição de A , sabemos que, neste conjunto,

$$|S_N| = |\xi_1 + \dots + \xi_N| \leq |\xi_1 + \dots + \xi_{N-1}| + |\xi_N| \leq x + K.$$

↓
Definição

↓
Desigualdade
triangular

↓
 $|\xi_N| \leq K$
e $|\xi_1 + \dots + \xi_{N-1}| \leq x$
em A

$$\mathbb{E}((S_N^2 - \Delta_N^2) \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}(S_N^2 \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}(|S_N|^2 \mathbb{1}_A) \leq \mathbb{E}((x+K)^2 \mathbb{1}_A) = (x+K)^2 \mathbb{P}(A).$$

↓
 $\Delta_j^2 \geq 0, \forall j \in \mathbb{N}$

↓
Monotonicidade

↓
Desigualdade
acima

Em $A^c = \{\max_{1 \leq m \leq n} |S_m| \leq x\}, x^2 \geq S_N^2$. Logo, $x^2 - \text{var } S_n \geq S_N^2 - \Delta_N^2,$

↓
 $\text{var } S_n = S_N^2$

em que $n=N$. Logo,

$$\mathbb{E}((S_N^2 - \Delta_N^2) \mathbb{1}_{A^c}) \leq (x^2 - \text{var}(S_n)) \mathbb{P}(A^c) = (x^2 - \Delta_N^2) \mathbb{P}(A^c).$$

Logo, vem

$$0 \leq (x+K)^2 \mathbb{P}(A) + (x^2 - \Delta_N^2) \mathbb{P}(A^c) =$$

$$= (x+K)^2 (1 - P(A^c)) + (x^2 - \text{var}(S_n)) \cdot P(A^c)$$

$$\downarrow$$

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

$$= (x+K)^2 + (x^2 - \text{var}(S_n) - (x+K)^2) P(A^c).$$

Dai, temos

$$\begin{aligned} (x+K)^2 &\geq - (x^2 - \text{var}(S_n) - (x+K)^2) P(A^c) \\ &= (-x^2 + \text{var}(S_n) + x^2 + 2xK + K^2) P(A^c) \\ &= (\text{var}(S_n) + 2xK + K^2) P(A^c) \\ &\geq \text{var}(S_n) P(A^c). \end{aligned} \quad (**)$$

$$\downarrow$$

$$x, K \geq 0$$

Desta maneira,

$$P\left(\max_{1 \leq m \leq n} |S_m| \leq x\right) = P(A^c) \leq \frac{(x+K)^2}{\text{var}(S_n)}, \text{ como queriamos.}$$

$\downarrow$ como definimos A $\downarrow$ (**)

Exercício 4.5: Se $-c < \lambda$, temos que

$$P\left(\max_{1 \leq m \leq n} X_m \geq \lambda\right) = P\left(\max_{1 \leq m \leq n} X_m + c \geq \lambda + c\right) \leq P\left(\max_{1 \leq m \leq n} (X_m + c)^2 \geq (\lambda + c)^2\right)$$

$\downarrow$ óbvio $\downarrow$ $\lambda + c > 0$,
por hipótese

$$\leq \frac{E(X_n + c)^2}{(\lambda + c)^2} = \frac{E X_n^2 + c^2}{(\lambda + c)^2}$$

$\downarrow$ Desigualdade de Tchebychev $\downarrow$ $E X_n = 0$, pois X_n é martingal e $E X_0 = 0$

Derivando a última expressão, e igualando a zero, temos que

$$-2 \frac{\mathbb{E}X_n^2 + c^2}{(c+\lambda)^3} + \frac{2c}{(c+\lambda)^2} = 0 \Rightarrow 2c(c+\lambda) = 2(\mathbb{E}X_n^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow c = \frac{\mathbb{E}X_n^2}{\lambda}$$

Substituindo este valor na primeira desigualdade que obtivemos, vem

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq m \leq n} X_m \geq \lambda\right) \leq \frac{\mathbb{E}X_n^2 + \left(\frac{\mathbb{E}X_n^2}{\lambda}\right)^2}{\left(\frac{\mathbb{E}X_n^2}{\lambda} + \lambda\right)^2} = \frac{(\lambda^2 + \mathbb{E}X_n^2) \mathbb{E}X_n^2}{(\mathbb{E}X_n^2 + \lambda^2)^2} \leq \frac{\mathbb{E}X_n^2 \cdot \mathbb{E}X_n^2}{(\mathbb{E}X_n^2 + \lambda^2)^2}$$

$\lambda^2 > 0$

multiplicando por $\frac{\lambda^2}{\lambda^2}$

$$= \left[\frac{\mathbb{E}X_n^2}{(\mathbb{E}X_n^2 + \lambda^2)} \right]^2 \leq \frac{\mathbb{E}X_n^2}{\mathbb{E}X_n^2 + \lambda^2} \quad (*)$$

$$\frac{\mathbb{E}X_n^2}{\mathbb{E}X_n^2 + \lambda^2} \leq 1$$

Se $-c \geq \lambda$, o ponto crítico $c = \frac{\mathbb{E}X_n^2}{\lambda}$ satisfaz que $-c \geq \lambda$ se, e somente se, $\lambda = 0$, sendo a desigualdade $\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq m \leq n} X_m \geq 0\right) \leq 1$ óbvia. Logo, por (*), provamos o resultado.

Observações: As questões a partir da seção 5 não precisam ser entregues. A questão sobre processo de ramificação foi entregue separadamente.

Exercícios propostos em sala

1) Assuma $P(X_1=a)=1$. Mostre que $I(a)=0$ e $I(z)=+\infty$, se $z \neq a$, em que $I(z) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tz - \log \varphi(t)]$ e $\varphi(t) = E(e^{tX_1}) < +\infty$.

Solução: calculando diretamente, temos

$$I(a) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [ta - \log(E(e^{at}))] = \sup_{t \in \mathbb{R}} [ta - \log(e^{at})] = \sup_{t \in \mathbb{R}} [ta - ta] = 0.$$

$\downarrow$ $P(X_1=a)=1$ $\downarrow$ e^{at} é constante

Agora, se $z \neq a$, temos

$$I(z) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tz - \log \varphi(t)] = \sup_{t \in \mathbb{R}} [t(z-a)].$$

$\downarrow$

$$\log \varphi(t) = at, \\ \text{já que } P(X_1=a)=1$$

$$\text{Se } z-a < 0, \quad (z-a)t \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} +\infty; \quad \text{se } z-a > 0, \quad (z-a)t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Portanto, temos que $I(z) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [(z-a)t] = +\infty$, como queríamos.

2) Calcule I para os processos de Poisson, Exponencial e Normal.

Solução:

i) Se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, com $\lambda > 0$, então $E(e^{tX_1}) = e^{\lambda(e^t-1)}$. Logo,

$$I(z) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tz - \log \varphi(t)] = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tz - \log e^{\lambda(e^t-1)}] = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tz - \lambda e^t + \lambda].$$

$$\text{Como } \lim_{t \rightarrow -\infty} (tz - \lambda e^t + \lambda) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (tz - \lambda e^t + \lambda) = -\infty, \text{ e}$$

$tz - \lambda e^t + \lambda$ é contínua,

CONTÍNUA NO
VERSO

derivando tal expressão, vemos que seu máximo global ocorre quando $t = -\log(\lambda/z)$.

Analogamente,

$$I(z) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tz - \lambda(e^t - 1)] = \lambda - (z/\lambda + z \log(\lambda/z)).$$

ii) Se $X \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, então $\mathbb{E}(e^{tx_1}) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, se $t < \lambda$,

$\mathbb{E}(e^{tx_1}) = +\infty$ se $t > \lambda$, e $\mathbb{E}(e^{tx_1}) = \lambda$ se $t = \lambda$.

No primeiro caso, se $t \rightarrow -\infty$, $tz - \log \frac{1}{\lambda - t} \rightarrow +\infty$. Analogamente,

$$I(z) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tz - \log \varphi(t)] = +\infty.$$

iii) Se $X \sim N(0, 1)$, então X tem densidade $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. Logo,

$$\mathbb{E}(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx} e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx - x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2tx - x^2)/2}}{\sqrt{2\pi}} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{t^2/2} e^{-(x-t)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/2} dx \underset{u=x-t}{=} \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du$$

$$= \frac{e^{t^2/2} \sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = e^{t^2/2}$$

Logo,

$$I(z) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tz - \log \varphi(t)] = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tz - \log e^{t^2/2}] = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tz - t^2/2].$$

Como $\lim_{t \rightarrow -\infty} [tz - t^2/2] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [tz - t^2/2] = -\infty$, e $tz - t^2/2$ é contínua, ao

derivarmos, vemos que $tz - t^2/2$ atinge seu valor máximo quando $t = z/2$.

$$\text{Logo, } I(z) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [tz - \log \varphi(t)] \underset{t=z/2}{=} \frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{8} = \frac{3z^2}{8}.$$

7ª LISTA DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Diogo Soares Dória da Silva

CADEIAS DE MARKOV

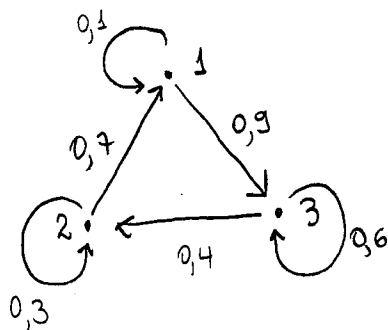
Exercício 1.1: Sabemos que, em $\{Z_n = i > 0\}$, temos que

$$P(Z_{n+1}=j | \mathcal{F}_n) = P\left(\sum_{m=1}^i \xi_m^{n+1} | \mathcal{F}_n\right) = p(i,j) = P(Z_{n+1}=j | Z_n),$$

Definição de
processos de ramificação

visto que as ξ_m^{n+1} são independentes de $\mathcal{F}_n$, mostrando que os processos de ramificação são cadeias de Markov.

Exercício 1.2:



i) Como $p(1,2)=0$, temos que $p^2(1,2) = p(1,3) \cdot p(3,2) = 0,9 \times 0,4 = 0,36$;

ii) Como $p(1,2)=p(2,3)=p(3,1)=0$, temos que $p^3(2,3) =$

$$p(2,1) \cdot p(1,3) \cdot p(3,3) + p(2,1) \cdot p(1,1) \cdot p(1,3) + p(2,2) \cdot p(2,1) \cdot p(1,3) =$$
$$= 0,3 \times 0,7 \times 0,9 + 0,7 \times 0,9 \times 0,6 + 0,7 \times 0,1 \times 0,9 = 0,63.$$

Exercício 1.3: Para $n=0$, $P_\mu(X_0=0) = \mu(0) =$

$$= \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \left[\mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right] \cdot 1 =$$

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta} + (1-\alpha-\beta)^0 \left\{ \mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right\}, \text{ valendo a igualdade.}$$

Suponha, agora, válida a igualdade para n . Então

$$P_{\mu}(X_{n+1}=0) = P_{\mu}(X_n=0) \cdot p(0,0) + P_{\mu}(X_n=1) \cdot p(1,0)$$

↓
Particionando
o percurso

$$= P_{\mu}(X_n=0) \cdot (1-\alpha) + P_{\mu}(X_n=0) \cdot \beta$$

Definição

$$= (1-\alpha) \left\{ \frac{\beta}{\beta+\alpha} + (1-\alpha-\beta)^n \left(\mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right) \right\} + P_{\mu}(X_n=1) \cdot \beta$$

↓
Hipótese de indução
em $P_{\mu}(X_n=0)$

$$= (1-\alpha) \left\{ \frac{\beta}{\beta+\alpha} + (1-\alpha-\beta)^n \left(\mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right) \right\}$$

↓
Hipótese de
indução em
 $P_{\mu}(X_n=1)$ e
complementaridade

$$+ \beta \left\{ \frac{\alpha}{\beta+\alpha} - (1-\alpha-\beta)^n \left(\mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right) \right\}$$

$$= \frac{\beta}{\beta+\alpha} + (1-\alpha-\beta)^n \left(\mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right) - \frac{\alpha\beta}{\beta+\alpha} - \alpha(1-\alpha-\beta)^n \left(\mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right)$$

$$+ \frac{\beta\alpha}{\alpha+\beta} - \beta(1-\alpha-\beta)^n \left(\mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right) = \frac{\beta}{\beta+\alpha} + (1-\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta)^n$$

$$\left(\mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right) = \frac{\beta}{\beta+\alpha} + (1-\alpha-\beta)^{n+1} \left(\mu(0) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} \right), \text{ como queríamos}$$

provar.

Exercício 1.4: A matriz de transição deste processo é

	HH	HT	TH	TT
HH	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
HT	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
TH	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
TT	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Notemos que
$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

ou seja, X_{n+2} e X_n são independentes.

Como $P(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n) = P(X_{n+1} \in B | X_n)$, fica claro que

X_n é uma cadeia de Markov.

Exercício 1.5: Suponhamos que os pais tenham genótipo Aa (ambos). Assim, as possibilidades para os genótipos dos filhos são

<u>AA</u>	<u>Aa</u>	<u>aa</u>
Prob. $\frac{1}{4}$	Prob. $\frac{1}{2}$	Prob. $\frac{1}{4}$

logo, os filhos serão

- Ambos AA com probabilidade $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
- AA, Aa com probabilidade $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- AA, aa com probabilidade $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
- Ambos Aa com probabilidade $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Aa, aa com probabilidade $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
- Ambos aa com probabilidade $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

Desta forma, calculando para todas as linhas, temos a matriz de transição:

	AA, AA	AA, Aa	AA, aa	Aa, Aa	Aa, aa	aa, aa
AA, AA	1	0	0	0	0	0
AA, Aa	1/4	1/2	0	1/4	0	0
AA, aa	0	0	0	1	0	0
Aa, Aa	1/16	1/4	1/8	1/4	1/4	1/16
Aa, aa	0	0	0	1/4	1/2	1/4
aa, aa	0	0	0	0	0	1

Exercício 1.6: Se a probabilidade de acrescentarmos um novo valor ao conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ no tempo $n+1$ depende somente do número de valores no tempo n , então

$$P(X_{n+1} \in B | \mathcal{F}_n) = P(X_{n+1} \in B | X_n),$$

mostrando que X_n é uma cadeia de Markov.

Assim, temos que

$$\begin{cases} p(k, k+1) = \frac{N-k}{N} & (\text{chance de sortear um novo número}) \\ p(k, k) = \frac{k}{N} & (\text{chance de sortear um número repetido}) \\ p(i, j) = 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $k \in \{0, 1, \dots, N\}$.

Exercício 1.7: Observe que

i) Se $X_n = S_n$, $P(X_{n+1} = X_n + 1) = 1/2$;

ii) se $X_n > S_n$, $P(X_{n+1} = X_n + 1) = 0$,

logo "as probabilidades de transição seriam diferentes" a depender de S_n . Logo, temos que X_n não é uma cadeia de Markov.

Exercício 2.1: Usando a dica, temos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_\mu(A \cap B | X_n) &= \mathbb{E}_\mu(\mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B | \mathcal{F}_n) | X_n) \\
 &= \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_A \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_B | \mathcal{F}_n) | X_n) \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}_n \\
 &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_B | X_n) | X_n) \\
 &\quad \downarrow \\
 &\text{Propriedade de Markov} \\
 &= \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_A | X_n) \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_B | X_n) \\
 &\quad \downarrow \\
 &\mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_B | X_n) \in \sigma(X_n) \\
 &= \mathbb{P}_\mu(A | X_n) \cdot \mathbb{P}_\mu(B | X_n),
 \end{aligned}$$

como queríamos.

Exercício 2.2 (i): Se definirmos $A := \{x : P_x(D) \geq \delta\}$, para $\delta > 0$ arbitrário, temos, pela definição de A , que

$$\mathbb{P}(\{X_n = a \text{ para algum } n \geq 1\} | X_n) \geq \delta$$

em $\{X_n \in A\}$.

Com isso, pelo Teorema 2.3, temos que

$$\mathbb{P}(\{X_n \in \{x : P_x(D) \geq \delta\} \text{ infinitas vezes}\} - \{X_n = a \text{ infinitas vezes}\}) = 0.$$

Como δ é arbitrário, quando $\delta \searrow 0$, $\{X_n = a \text{ para algum } n \geq 1\}$

$\rightarrow \{X_n = a \text{ infinitas vezes}\}$. Logo, em $D^c = \{X_n \neq a, \forall n\}$, temos que

$$h(X_n) = \mathbb{P}_{X_n}(\{X_n = a \text{ para algum } n \geq 1\}) \rightarrow 0 \text{ q.c.}, \text{ como queríamos.}$$

Exercício 2.3: Particionando os caminhos, é direto

que

$$P_x(X_n=y) = \sum_{m=1}^n P_x(T_y=m; X_n=y).$$

Seja $m=n$, temos que $P_x(T_y=n; X_n=y) \stackrel{\downarrow}{=} P(T_y=n) =$
 $= P_x(T_y=n) \cdot \underbrace{p^\circ(y,y)}_1$, valendo a hipótese. $T_y=n \Rightarrow X_n=y$

Como $m < n$, pela propriedade de Markov, temos

$$P_x(X_n=y | \mathcal{F}_n) = P_x(\mathbb{1}_{\{X_{n-m}=y\}} \circ \Theta_m | \mathcal{F}_m) = P_{X_m}(X_{n-m}=y). \quad (*)$$

Portanto, temos

$$p^n(x,y) = P_x(X_n=y) = \sum_{m=1}^n P_x(T_y=m; X_n=y) = \sum_{m=1}^n E_x(\mathbb{1}_{\{X_n=y\}}; T_y=m)$$

Particionando
os caminhos

$$= \sum_{m=1}^n P_x(T_y=m) \cdot P_y(X_{n-m}=y) = \sum_{m=1}^n P_x(T_y=m) \cdot p^{n-m}(y,y), \text{ como queríamos.}$$

$\downarrow$
*) e $X_m=y$

Exercício 2.4: Se definirmos $T := \min\{m \geq k; X_m=x\}$, pelo exercício anterior, temos que

$$P_x(X_m=x) = \sum_{l=k}^m P_x(T=l) \cdot p^{m-l}(x,x).$$

Portanto, temos que

$$\sum_{m=k}^{n+k} P_x(X_m=x) = \sum_{m=k}^{n+k} \sum_{l=k}^m P_x(T=l) \cdot p^{m-l}(x,x)$$

$\downarrow$
Da última
expressão

$$= \sum_{l=k}^m \sum_{m=k}^{m-l} P_x(T=l) p^{m-l}(x, x)$$

Fubini

$$= \sum_{l=k}^{n+k} \sum_{m=k}^{n+k} P_x(T=l) \cdot p^{m-l}(x, x)$$

m varia de k
a $n+k$, logo
 l varia de k até $n+k$

$$= \sum_{l=k}^{n+k} \left[P_x(T=l) \sum_{m=k}^{n+k} p^{m-l}(x, x) \right]$$

$P_x(T=l)$ independe
de m

$$= \sum_{l=k}^{n+k} \left[P_x(T=l) \sum_{j=0}^n p^j(x, x) \right]$$

Translação

$$\leq \sum_{j=0}^n p^j(x, x) = \sum_{m=0}^n P_x(X_m = x), \text{ como queríamos demonstrar.}$$

$$\sum_{l=k}^{n+k} P_x(T=l) \leq 1$$

Exercício 2.6: (i) Como $x \in A \cup B$, temos que

$$\mathbb{1}_{\{\tau_A < \tau_B\}} \circ \theta_1 = \mathbb{1}_{\{\tau_A < \tau_B\}}. \text{ Passando a esperança em ambos os lados, temos}$$

$$\mathbb{E}_x(\mathbb{1}_{\{\tau_A < \tau_B\}}) = \mathbb{E}_x(\mathbb{1}_{\{\tau_A < \tau_B\}} \circ \theta_1)$$

$$\Rightarrow P_x(\tau_A < \tau_B) = \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_x(\mathbb{1}_{\{\tau_A < \tau_B\}} \circ \theta_1 | \mathcal{F}_1)) = \sum_y p(x, y) \cdot P_y(\tau_A < \tau_B).$$

Propriedade
de Markov

$$\text{Logo, temos que } h(x) = \sum_y p(x, y) \cdot P_y(\tau_A < \tau_B).$$

ii) Em $\{\tau_{A \cup B} > n\} \in \mathcal{F}_n$, temos $X_{(n+1) \wedge \tau_{A \cup B}} = X_{n+1}$.

Logo,

$$\mathbb{E}(h(X_{(n+1) \wedge \tau_{A \cup B}}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(h(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(h(X_1) \circ \theta_n | \mathcal{F}_n)$$

$$= \mathbb{E}_{X_n} h(X_1) = h(X_n) = h(X_{n \wedge \tau_{A \cup B}}). \quad (\square) \quad \begin{array}{l} \text{Propriedade} \\ \text{de Markov} \end{array}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 (i) $\mathbb{E}_{X_n} \{\tau_{A \cup B} > n\}$

Em $\{\tau_{A \cup B} \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, temos $X_{(n+1) \wedge \tau_{A \cup B}} = X_{n \wedge \tau_{A \cup B}} \in \mathcal{F}_n$. Logo,

$$\mathbb{E}(h(X_{(n+1) \wedge \tau_{A \cup B}}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(h(X_{n \wedge \tau_{A \cup B}}) | \mathcal{F}_n) = h(X_{n \wedge \tau_{A \cup B}}). \quad (\Delta)$$

$\downarrow$
 (i)

Por $(\square)$ e (Δ) , temos que $h(X_{n \wedge \tau_{A \cup B}})$ é martingal.

iii) Como, por hipótese, $P_x(\tau_{A \cup B} < \infty) > 0$, pelo exercício 2.5, existem $N < \infty$ e $\varepsilon > 0$ tais que $P_x(\tau_{A \cup B} > KN) \leq (1 - \varepsilon)^K$, ou seja, $\tau_{A \cup B} < \infty$ quase certamente.

Pelo fato de $S(A \cup B)$ ser finito, qualquer solução h é limitada. Logo, pelo Teorema da convergência de Martingais,

$$h(x) = \mathbb{E}_x h(X_{n \wedge \tau_{A \cup B}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x h(X_{\tau_{A \cup B}}) = P_x(\tau_A < \tau_B),$$

mostrando que $h(x)$ é solução única para $(*)$.

Exercício 2.7: i) Como X_n é um martingal, então

$$1) \mathbb{E}_0(X_n) = 0;$$

$$2) \mathbb{E}_N(X_n) = N.$$

Por 1), como $X_n \geq 0$, $\forall n$, então $P_0(X_n = 0) = 1$, $\forall n$. logo, $p(0,0) = 1$.

Por 2), como $X_n \leq N$, $\forall n$, então $P_N(X_n = N) = 1$, $\forall n$. logo, $p(N,N) = 1$.

ii) Pelo exercício 2.5, $\tau_0 \wedge \tau_N < \infty$ quase certamente. Ou seja,

$P_x(\tau_0 \wedge \tau_N < \infty) = 1$ quase certamente. Assim, temos

$$x = \mathbb{E}_x(X(\tau_0 \wedge \tau_N \wedge n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_x(X(\tau_0 \wedge \tau_N)) = 0 \cdot P_x(\tau_0 < \tau_N) + N \cdot P_x(\tau_N < \tau_0) = N \cdot P_x(\tau_N < \tau_0).$$

$\downarrow$ X_n martingal $\downarrow$ Teorema da convergência limitada $\downarrow$ Definição de esperança

$$+ N \cdot P_x(\tau_N < \tau_0) = N \cdot P_x(\tau_N < \tau_0).$$

Assim, temos que $P_x(\tau_N < \tau_0) = x/N$, como queríamos.

Exercício 2.8: (i) Notemos que

$$1) \sum_{j=0}^N p(i,j) = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j} = 1;$$

Cada elemento sobrevive com probabilidade i/N

$$2) \sum_{j=0}^N j \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{N}\right)^{N-j} = i, \text{ logo } X_n \text{ é martingal};$$

Soma de N Bernoulli's de parâmetro i/N

3) Os estados pertencem ao conjunto $\{0, 1, \dots, N\}$;

$$4) \text{ Se } i \neq N, p(i,0) = \left(1 - \frac{i}{N}\right)^N > 0 \Rightarrow P_x(\tau_0 \wedge \tau_N < \infty) = 1.$$

$$\text{Se } i \neq 0, p(i,N) = \left(\frac{i}{N}\right)^N > 0$$

Por 1, 2, 3 e 4, (i) satisfaz as hipóteses do exercício anterior.

$$ii) 1) \sum_{j=0}^N \binom{2i}{j} \binom{2N-2i}{N-j} / \binom{2N}{N} = \binom{2N}{N}^{-1} \sum_{j=0}^{2i} \binom{2i}{j} \binom{2N-2i}{N-j} = \binom{2N}{N}^{-1} \binom{2N}{N} = 1;$$

$\downarrow$ j atinge $2i$, no máximo $\downarrow$ Relação de Stifel repetidas vezes

$$2) \sum_{j=0}^{2i} j \binom{2i}{j} \binom{2N-2i}{N-j} / \binom{2N}{N} = \sum_{j=1}^{2i} j \binom{2i}{j} \binom{2N-2i}{N-j} = i, \text{ logo } X_n$$

$\downarrow$ Por 1) $\downarrow$ Amostragem sem reposição para um grupo com $2i$ 1's e $2N-2i$ 0's, e N retiradas.

X é martingal;

3) Os estados pertencem ao conjunto $\{0, 1, \dots, N\}$;

$$4) \text{ Se } i \leq N/2, p(i,0) = \frac{\binom{2N-2i}{N}}{\binom{2N}{N}} > 0 \Rightarrow P_x(\tau_0 \wedge \tau_N < \infty) = 1.$$

$$\text{Se } i > N/2, p(i,N) = \frac{\binom{2i}{N}}{\binom{2N}{N}} > 0$$

Por 1, 2, 3 e 4, (ii) satisfaz as hipóteses do exercício anterior.

Exercício 2.9: Observando a tabela do exercício 1.5, temos que

i) Se os pais possuem 4 A's, os filhos possuem 4 A's;

ii) Se os pais possuem 3 A's, os filhos possuem esperança de

$$4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 3 \text{ A's};$$

iii) Se os pais são AA e aa, os filhos terão 2 A's;

iv) Se os pais são ambos Aa, os filhos possuem esperança de

$$4 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{16} = 2 \text{ A's};$$

v) Se os pais possuem 1 A, os filhos possuem esperança de

$$2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{4} = 1 \text{ A};$$

vi) Se os pais não são aa ambos, os filhos também serão.

Por i) - vi), temos que a quantidade de genes A é um martingal.

Pelo exercício 2.7, como a quantidade de A's é um martingal,

$P_n(\tau_0 \wedge \tau_4 < \infty) > 0, \forall x \in \{0, 1, \dots, 4\}$, então $P_x(\tau_4 > \tau_0) = x/4$, ou

seja, para os genótipos dos pais

- AA, AA há probabilidade 1 de cairmos em AA, AA;

- AA, Aa " " $3/4$ " " " " ;

- Aa, Aa ou AA, aa " " $1/2$ " " " " ;

- Aa, aa " " $1/4$ " " " " ;

- aa, aa não há probabilidade de chegarmos em AA, AA.

Exercício 2.10: i) bomo $x \neq 1$, então $\tau_A \circ \theta_1 = \tau_A - 1$.

Logo, temos, passando a esperança, que

$$\mathbb{E}_x(\tau_A \circ \theta_1) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Igualdade} \\ \text{acima}}}{=} \mathbb{E}_x(\tau_A - 1) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Linearidade}}}{=} \mathbb{E}_x(\tau_A) - 1 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Definição}}}{=} g(x) - 1. \quad (*)$$

Logo, por (*), temos que

$$g(x) = 1 + \mathbb{E}_x(\tau_A \circ \theta_1) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Propriedade} \\ \text{de Markov}}}{=} 1 + \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_x(\tau_A \circ \theta_1 | \mathcal{F}_1)) = 1 + \mathbb{E}_x(g(X_1))$$

$$= 1 + \sum_y p(x, y) g(y), \text{ como queríamos provar.}$$

ii) Em $\{\tau_A \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, temos que

$$\mathbb{E}_x(g(X_{(n+1) \wedge \tau_A}) + ((n+1) \wedge \tau_A) | \mathcal{F}_n) \underset{\substack{\downarrow \\ \tau_A \leq n, \\ \text{por hipótese}}}{=} \mathbb{E}_x(g(X_{n \wedge \tau_A}) + (n \wedge \tau_A) | \mathcal{F}_n)$$

$$= g(X_{n \wedge \tau_A}) + (n \wedge \tau_A).$$

A expressão dentro da esperança é mensurável com respeito à $\mathcal{F}_n$

Em $\{\tau_A > n\} \in \mathcal{F}$, temos que

$$\mathbb{E}_x(g(X_{(n+1) \wedge \tau_A}) + (n+1) \wedge \tau_A | \mathcal{F}_n) \underset{\substack{\downarrow \\ \tau_A > n, \\ \text{por hipótese}}}{=} \mathbb{E}_x(g(X_{n+1}) + (n+1) | \mathcal{F}_n)$$

$$= \mathbb{E}(g(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(n+1 | \mathcal{F}_n) \underset{\substack{\downarrow \\ n+1 \text{ é} \\ \text{mensurável} \\ \text{com respeito} \\ \text{à } \mathcal{F}_n}}{=} \mathbb{E}(g(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) + n+1$$

Linearidade

$$\begin{aligned} &= g(X_n) - 1 + n + 1 = g(X_n) + n = g(X_{n \wedge \tau_A}) + (n \wedge \tau_A). \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ &g \text{ satisfaz } (*) \qquad \tau_A > n, \\ &\qquad \qquad \qquad \text{por hipótese} \end{aligned}$$

Assim, temos que $g(X_{n\tau_n}) + (n\tau_n)$ é um martingal.

iii) Como $S \setminus A$ é finito e $P_x(\tau_A < \infty) > 0$, pelo exercício 2.5, temos que existem $N < \infty$ e $\varepsilon > 0$ tais que $P_y(\tau_A > kN) \leq (1-\varepsilon)^k$, $\forall y \notin A$.
 Logo, $P(\tau_A > kN)$ decresce geometricamente,

que existem $N < \infty$ e $\varepsilon > 0$ tais $P_Y(\tau_A > kN) = (\pm \varepsilon)$, $\forall k \neq 1$.

Desta forma, temos que $P_Y(\tau_A > kN)$ decresce geometricamente, ou seja, $E_Y \tau_A < \infty$. Como SIA é finito, toda solução de (*) é limitada. Assim, pelo Teorema da Convergência Monótona (notando que $g(X_{n \wedge \tau_A}) + (n \wedge \tau_A)$ é max-regular),

$$E_x(g(X_{n \wedge \tau_A}) + (n \wedge \tau_A)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} E_x \tau_A = g(x),$$

mostrando que $g(x)$ é solução de (*) em SLA , como queríamos.

Exercício 2.12: Proximos por indução:

i) Ovviamente, $\mathbb{E}_1 T_1 := \inf \{n \geq 1 : X_n = 1\} = 1$

i) Obviamente, $\mathbb{E}_1 T_1 := \inf \{n \geq 1: X_n = 1\} = 1$;
 ii) Supondo válida a igualdade $\mathbb{E}_k T_1 = \sum_{j=1}^{k-1} 1/j$ (*), temos

$$\mathbb{E}_{k+1} T_1 = \mathbb{E}_k T_1 + \mathbb{E}_{k+1} T_k = \mathbb{E}_k T_1 + \frac{1}{p(k+1, k)} = \mathbb{E}_k T_1 + \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} + \frac{1}{k}$$

A cadeia caminha somente para a esquerda, e para sair de $k+1$ para 1 , devemos sair de $k+1$ para k , depois de k para 1

Definição da probabilidade de transição

Hipótese de indução (*)

$$= \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}, \text{ como queríamos demonstrar.}$$

Exercícios propostos em sala

1) Mostre que y é recorrente se, e somente se,
 $E_y N(y) = \infty$.

Solução: Já sabemos que $E_x N(y) = \frac{f_{xy}}{1 - f_{yy}}$. Logo, temos que

$$E_y N(y) = \frac{f_{yy}}{1 - f_{yy}}, \text{ sendo } \frac{1}{0} = \infty.$$

$\Rightarrow$ Se y é recorrente, temos que $f_{yy} = 1$. Logo, $E_y N(y) = \frac{1}{1-1}$

$= \infty$.

$\Leftarrow$ $E_y N(y) = \infty \Rightarrow \frac{f_{yy}}{1 - f_{yy}} = \infty \Rightarrow f_{yy} = 1 \Rightarrow y$ é recorrente.

8ª LISTA DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Diogo Soares Dória da Silva

CADEIAS DE MARKOV

Exercício 3.4: A propriedade forte de Markov implica que
$$P_x(T_z \circ \theta_{T_y} < \infty | \mathcal{F}_{T_y}) = P_y(T_z < \infty) \text{ em } \{T_y < \infty\}. \quad (*)$$

Anim, temos

$$\begin{aligned} f_{xz} &= P_x(T_z < \infty) \geq P(T_z \circ \theta_{T_y} < \infty) \\ &\quad \downarrow \\ &T_z \circ \theta_{T_y} < \infty \Rightarrow T_z < \infty \\ &= E_x(P_x(T_z \circ \theta_{T_y} < \infty | \mathcal{F}_{T_y}); T_y < \infty) \\ &\quad \downarrow \\ &\text{Definição de} \\ &\text{esperança condicional} \\ &= E_x(P_y(T_z < \infty); T_y < \infty) \\ &\quad \downarrow \\ &(*) \\ &= P_x(T_y < \infty) \cdot P_y(T_z < \infty) = f_{xy} f_{yz}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Exercício 3.5: Sejam $\{0, \dots, N\}$ o conjunto de estados na urna de Ehrenfest. Como $\{0, \dots, N\}$ é um conjunto finito, pelo Teorema 3.5, um dos estados é recorrente.

Novamente pelo Teorema 3.5, como $f_{xy} > 0$, $\forall x, y \in \{0, \dots, N\}$ a urna de Ehrenfest é uma cadeia irredutível, logo todos os estados são recorrentes.

Observação: $f_{xy} > 0$, $\forall x, y \in \{0, \dots, N\}$, pois $p(i, i+1), p(i, i-1) > 0$ para $i \in \{1, \dots, N-1\}$ e $p(1, 0) = p(N-1, N) = \frac{1}{N} > 0$, assim, $p^{|x-y|}(x, y) > 0$,
isto é, $x \neq y$ e $p^2(x, y) > 0$ se $x \neq y$. (1)

Exercício 4.1: Resolvendo diretamente, temos

$$p(x,y) = P_\mu(Y_{m+1}=y | Y_m=x) = \frac{P_\mu(Y_m=x; Y_{m+1}=y)}{P_\mu(Y_m=x)}$$

↓
Bayes

$$= \frac{P_\mu(Y_{m+1}=y) P_\mu(Y_m=x | Y_{m+1}=y)}{P_\mu(Y_m=x)}$$

↓
Exercício 2.1

$$= \frac{P_\mu(X_{n-m-1}=y) P_\mu(X_{n-m}=x | X_{n-m-1}=y)}{P_\mu(X_{n-m}=x)} = \frac{\mu(y) p(y,x)}{\mu(x)} = q(x,y),$$

↓
Definição
(μ reversível)

Reescrevendo
os índices

$\forall x,y$. Logo, $q=p$, como queríamos mostrar.

Exercício 4.3: Pelo Teorema 4.4, como a medida estacionária é única, a menos de múltiplos, temos que

$$\frac{\mu_y(z)}{\mu_y(y)} = \frac{\mu_x(z)}{\mu_x(y)}, \quad \forall x,y,z.$$

Como $\mu_y(y)=1$, temos diretamente que $\mu_x(z) = \mu_x(y) \mu_y(z)$, como queríamos demonstrar.

Exercício 4.8: Seja $n = \inf \{m: p^m(x,y) > 0\}$, e sejam $x_1, \dots, x_{n-1}$ tais que

$$p(x, x_1) \cdots p(x_{n-1}, y) > 0.$$

Assim, temos que

$$\infty > \mathbb{E}_x T_x \geq \mathbb{E}_x (T_x; X_1=x_1; X_2=x_2; \dots; X_{n-1}=x_{n-1}; X_n=y)$$

↓
p recorrente
positivo

$$\{T_x\} \geq \{T_x \cap \dots\}$$

$$\geq p(x, x_1) \dots p(x_{n-1}, y) \cdot \mathbb{E}_y T_x.$$

Propriedade de
Markov

Logo, temos que $\mathbb{E}_y T_x < \infty$, como pretendíamos.

Exercício 4.9: Seja p recorrente positivo. Como, por hipótese, p é irredutível, pelo Teorema 4.7, existe distribuição estacionária.

Pelo Teorema 4.4, toda distribuição estacionária é múltipla de μ , em particular, μ é distribuição estacionária.

Mas, como $\sum_x \mu(x) = \infty$, μ não pode ser distribuição estacionária, assim como nenhum dos seus múltiplos não-triviais, chegando em um absurdo.

Portanto, por contraposição, p não pode ser recorrente positivo.

Exercício 4.10: Este é um passeio aleatório em que o grau de cada casa (número de casas que podem ser alcançadas em um movimento) define a medida estacionária, digamos π .

Claramente, esta cadeia é irredutível. Abaixo, segue o grau de cada casa:

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

sendo a_1 a casa do canto, temos que

$$\pi(a_1) = \frac{2}{\sum_x \pi(x)} = \frac{2}{336} = \frac{1}{168}.$$

A partir de a_1 , só temos dois movimentos possíveis

Soma de todos os "pesos" é 336

Pelo Teorema 4.6, como a cadeia é irredutível e π é estacionária, então

$$\mathbb{E}_{a_1} T_{a_1} = \frac{1}{\pi(a_1)} = 168.$$

Exercícios propostos em sala

1) Suponha que $\sum_{x \in S} \mu(x) \cdot p(x, y) = \mu(y)$. Usando indução e a Propriedade de Markov, prove que $P_\mu[X_n = y] = \mu(y)$.

Solução: Faremos por indução:

Para $n=1$, temos

$$P_\mu[X_1 = y] = \mu(y),$$

como consequência imediata da igualdade fornecida;
generalizando, temos

$$P_\mu[X_{n+1} = y] = \sum_{x \in S} P_\mu[X_{n+1} = y; X_n = x] = \sum_{x \in S} P_\mu[X_{n+1} = y | X_n = x] \cdot P_\mu[X_n = x]$$

↓
Bayes

↓
Particionando o espaço

$$= \sum_{x \in S} p(x, y) \cdot P_\mu[X_n = x] = \sum_{x \in S} p(x, y) \cdot \mu(x) = \mu(y),$$

↓
Propriedade de Markov

↓
Hipótese de indução

↓
Por hipótese

como queríamos demonstrar.

2) Mostre que o passeio do bêbado unidimensional é recorrente nulo.

Solução: Sabemos que esta cadeia é periódica, de período 2, logo

$$P^{2n+1}(i,i) = 0. \text{ Além disso, } P^{2n}(i,i) = \frac{(2n)!}{n!n!} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 n passos para a esquerda e n passos para a direita Stirling

$$= \frac{2\sqrt{\pi n} (2n)^{2n} e^n \cdot e^n}{2\pi n \cdot n^n \cdot n^n \cdot 2^{2n} \cdot e^{2n}} = \frac{\sqrt{\pi n} \cdot 2^{2n} \cdot n^{2n}}{\pi n \cdot n^n \cdot n^n \cdot 2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Além disso, adaptando o princípio da reflexão (Teorema de Ballot) ao passeio que sai de $(0,0)$ ao ponto $(n-1,n)$ sem tocar a 1^{a} simetriz, e depois acrescentando o passo até (n,n) , $\frac{1}{2n-1}$ dos passeios de $2n$ passos tocam a origem pela primeira vez no último passo.

$$\text{Logo, } P_0(T_0^1 = 2n) = P_0(X_{2n} = 0; X_k \neq 0, \forall k < 2n) \\ = P_0(X_k \neq 0, \forall k < 2n | X_{2n} = 0) \cdot P(X_{2n} = 0) \sim \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\text{Desta maneira, } \mathbb{E}_x T_x \sim \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{\sqrt{\pi n(2n-1)}} \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

Portanto, o passeio do bêbado unidimensional é recorrente nulo, como queríamos provar.

$$\frac{n}{2n-1} \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$