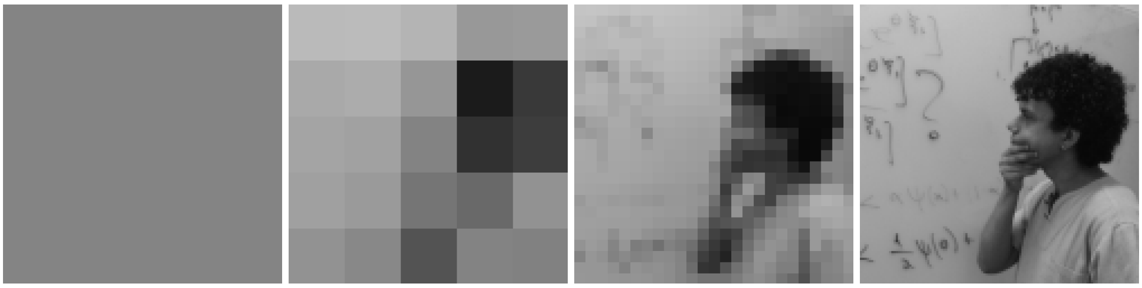
Prova 1 - MAT563 2014.1
Processos Estocásticos
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 4h. Data 11/06/2014

1. (a) Defina esperança condicional. Defina martingal.
   (b) Interprete a sequência abaixo em termos de martingais. Descreva em palavras a filtração utilizada.



2. Considere um passeio aleatório em $\mathbb{R}^d$ tal que $B(0,\varepsilon) \subseteq \mathcal{A}$, onde $\mathcal{A}$ é conjunto dos pontos recorrentes do passeio e $\varepsilon > 0$. Argumente porque teremos $\mathcal{A} = \mathbb{R}^d$.

3. (a) Seja S_n o passeio aleatório simples simétrico em $\mathbb{Z}$ com $S_0 = 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\cos\lambda \neq 0$. Mostre que

$$Z_n = \frac{\cos\left\{\lambda[S_n - \frac{1}{2}(b-a)]\right\}}{(\cos\lambda)^n}$$

   é um martingal.

   (b) Sejam a e b inteiros positivos. Mostre que o tempo T até o passeio tocar em $-a$ ou b satisfaz

$$\mathbb{E}\Big[(\cos\lambda)^{-T}\Big] = \frac{\cos\left\{\frac{1}{2}\lambda(b-a)\right\}}{\cos\left\{\frac{1}{2}\lambda(b+a)\right\}}$$

   Obs: assuma que $Z_{n\wedge T}$ é uniformemente integrável (que vale sob a hipótese $0 < \lambda < \pi/(a+b)$, mas você não precisa se preocupar com isso).

4. (**O problema dos casacos**) Numa festa há k pessoas, e cada uma tem um casaco pendurado (no tempo zero). No tempo $n = 1$, cada pessoa pega um casaco ao acaso. As pessoas que acertam o próprio casaco vão embora da festa (com seu respectivo casaco). As outras recomeçam o processo, até que todas consigam ir embora. Seja N o tempo até todos irem embora. Prove que $\mathbb{E}[N] = k$. **Dica:** Seja X_n o número de pessoas que saem da sala no n-ésimo tempo. Mostre que $\mathbb{E}[X_n] = 1$ de um jeito esperto. Em seguida, mostre que $X_1 + \cdots + X_n - n$ é martingal.