Universidade Federal da Bahia - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Professor: Tertuliano Franco
Aluno: Felipe Fonseca dos Santos

Capítulo 4

Lista I - (Data 01/04/14)

Teorema 0.1. *Para um RW (passeio aleatório) em $\mathbb{R}$, há apenas 4 possibilidades, uma das quais tem probabilidade 1.*

1. $S_n = 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$;
2. $S_n \longrightarrow +\infty$;
3. $S_n \longrightarrow -\infty$;
4. $-\infty = \liminf S_n < \limsup S_n = +\infty$.

QUESTÃO 1.1: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ independentes e identicamente distribuídas, $X_i \in \mathbb{R}$ com distribuição simétrica em torno de zero e não degenerada ($\mathbb{P}(X_i = 0) < 1$). Mostre que estamos na condição (iv) do Teorema 0.1.

Resolução: Note que (1) não pode acontecer, pois a distribuição é não degenerada. Suponha então que aconteça a condição (2), ou seja, $S_n \longrightarrow +\infty$ *q.c.*. Como X_i é simétrica então $X_i \sim -X_i$, usando independência concluímos que $(X_1, X_2, \ldots)$ tem a mesma distribuição que $(-X_1, -X_2, \ldots)$. Logo $-S_n \longrightarrow +\infty$ *q.c.*, mas isso gera uma contradição, pois $\mathbb{P}(-S_n \longrightarrow +\infty) = \mathbb{P}(S_n \longrightarrow +\infty) = 1$. Portanto (2) não pode ocorrer.

De modo análogo argumentamos para o caso (3). Suponha que ocorra (3), ou seja, $S_n \longrightarrow -\infty$ *q.c.*. Como X_i é simétrica então $X_i \sim -X_i$, usando independência concluímos que $(X_1, X_2, \ldots)$ tem a mesma distribuição que $(-X_1, -X_2, \ldots)$. Logo $-S_n \longrightarrow -\infty$ *q.c.*, mas isso implica que $\mathbb{P}(-S_n \longrightarrow -\infty) = \mathbb{P}(S_n \longrightarrow -\infty) = 1$. Portanto (3) não ocorre.

Assim, estamos na condição (4) do Teorema 0.1.

QUESTÃO 1.2: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ independentes e identicamente distribuídas com $\mathbb{E}(X_i) = 0$ e $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2 \in (0,1)$. Use o Teorema Central do Limite para concluir que estamos no caso (4) do Teorema 0.1.

Resolução: Supondo que (1) aconteça, temos que $S_n = 0$ para todo n, isto implica em particular que $S_1 = X_1 = 0$, logo $S_2 = X_1 + X_2 = X_2 = 0$ e procedendo desta forma temos que $X_1, X_2, \ldots = 0$, mas por hipótese $\mathbb{E}(X_i^2) = \sigma^2 > 0$. Desta contradição concluímos que (1) não pode acontecer.

Observe agora que como os $X_i's$ são independentes $\text{Var}(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i)$ e como $\mathbb{E}(X_i) = 0$ para todo i ($\text{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i - \mathbb{E}(X_i))^2 = \mathbb{E}(X_i)^2 = \sigma^2$) chegamos que $\text{Var}(S_n) = n\sigma^2$. Pelo Teorema Central do Limite

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Y \sim N(0,1).$$

Como $Y \sim N(0,1)$ então $F_Y(\alpha) = \mathbb{P}(Y \leq \alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$. Mas pelo T.C.L.

$$F_{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}(\alpha) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq \alpha\right) \longrightarrow F_Y(\alpha) = \mathbb{P}(Y \leq \alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

para todo α ponto de continuidade de F_Y.

Assim, caso $\mathbb{P}(S_n \longrightarrow +\infty) = 1$ temos que $\mathbb{P}(S_n \leq \alpha\sigma\sqrt{n}) \searrow 0$ para $\alpha < 0$ ponto de continuidade de F_Y. Mas $\int\limits_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx > 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Absurdo, logo (2) não vale.

Caso $\mathbb{P}(S_n \longrightarrow -\infty) = 1$ temos para $\alpha > 0$ ponto de continuidade de F_Y que $\mathbb{P}(S_n \geq \alpha\sigma\sqrt{n}) \searrow 0$. Mas

$$0 \swarrow \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} > \alpha\right) \longrightarrow \mathbb{P}(Y > \alpha) = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx > 0$$

e deste absurdo concluímos que (3) não vale. Pelo Teorema 0.1 chegamos que estamos no caso (4).

QUESTÃO 1.3: Se S e T são tempos de parada. Então $S \wedge T$ e $S \vee T$ são tempos de parada. Como os tempos constantes são tempos de parada, segue que $S \wedge n$ e $S \vee n$ são tempos de parada.

Resolução: Observe que $\{S \wedge T = n\} = \{S = n,\ T \geq n\} \cup \{T = n,\ S \geq n\}$ e como $\{S = n,\ T \geq n\} = \{S = n\} \cap \{T \geq n\}$ e $\{T = n,\ S \geq n\} = \{T = n\} \cap \{S \geq n\}$ então podemos escrever $\{S \wedge T = n\} = (\{S = n\} \cap \{T \geq n\}) \cup (\{T = n\} \cap \{S \geq n\})$.

Sabendo que S e T são tempos de parada temos que $\{T = n\}, \{S = n\} \in \mathfrak{F}_n$. Ademais $\{T \geq n\} = \{T \leq n-1\}^c$ e como $\{T \leq n-1\} = \bigcup\limits_{m=1}^{n-1} \{T = m\} \in \mathfrak{F}_n$ logo $\{T \geq n\} \in \mathfrak{F}_n$ e o mesmo vale para $\{S \geq n\}$. Portanto $\{S \wedge T = n\} \in \mathfrak{F}_n$.

De maneira análoga podemos escrever $\{S \vee T = n\} = \{S = n,\ T \leq n\} \cup \{T = n,\ S \leq n\} = (\{S = n\} \cap \{T \leq n\}) \cup (\{T = n\} \cap \{S \leq n\})$. Como $\{S = n\}, \{T \leq n\}, \{T = n\}, \{S \leq n\} \in \mathfrak{F}_n$ chegamos que $\{S \vee T = n\} \in \mathfrak{F}_n$.

Por fim, note que as constantes são tempos de parada, pois para $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ fixo, a variável aleatória $N_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ definida por $N_n(\omega) = n$ nos fornece que

$$\{N_n = k\} = \begin{cases} \Omega & se \quad k = n \\ \varnothing & se \quad k \neq n. \end{cases}$$

mas $\Omega, \varnothing \in \mathfrak{F}_k$ para qualquer k. Daí conclui que N_n é tempo de parada e pelo que fizemos acima $S \wedge n$ e $S \vee n$ são tempos de parada.

QUESTÃO 1.4: Suponha S e T tempos de parada. $T + S$ é tempo de parada? Prove ou dê contra-exemplo.

Resolução: Note que $\{S+T = n\} = \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} (\{S = n-k\} \cap \{T = k\})$ e com S e T são tempos de parada temos que $\{S = n-k\} \in \mathfrak{F}_{n-k} \subset \mathfrak{F}_n$ e $\{T = k\} \in \mathfrak{F}_k \subset \mathfrak{F}_n$. Logo $\{S + T = n\} \in \mathfrak{F}_n$ e portanto $T + S$ é tempo de parada.

QUESTÃO 1.5: Mostre que se $Y_n \in \mathfrak{F}_n$ e N é tempo de parada, $Y_N \in \mathfrak{F}_N$. Como corolário deste resultado temos que se $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável, $T_n = \sum\limits_{m \leq n} f(X_m)$ e $M_n = \max\limits_{m \leq n} T_m$ então T_N e $M_N \in \mathfrak{F}_N$. Um caso especialmente importante é $S = \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Resolução: Sabendo que $Y_n \in \mathfrak{F}_n$, ou seja, $\{Y_n \in B\} \in \mathfrak{F}_n$ para B boreliano de Ω e todo $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ e usando que N é tempo de parada ($N(\omega) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$), temos $\{Y_{N(\omega)} \in B\} \in \mathfrak{F}_{N(\omega)} \subset \mathfrak{F}$. Além disso $\{Y_{N(\omega)} \in B\} \cap \{N = n\} = \{Y_n \in B\} \cap \{N = n\} \in \mathfrak{F}_n$, portanto $Y_{N(\omega)} \in \mathfrak{F}_N$.

Como $X_m : \Omega \longrightarrow S$ e $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções mensuráveis, temos que $\{f(X_m) \in B\} = X_m^{-1}(\{f^{-1}(B)\})$ é mensurável, pois sendo f mensurável então $\{f^{-1}(B)\} \in \sigma(S)$ é um conjunto mensurável e portanto $X_m^{-1}(\{f^{-1}(B)\}) \in \sigma(X_m)$. Como soma de funções mensuráveis é mensurável temos que $\sum\limits_{m \leq n} f(X_m)$ é mensurável e portanto $\{T_n \in B\} \in \mathfrak{F}_n$. Pelo que já foi feito acima, concluímos que $T_N \in \mathfrak{F}_N$.

Pelo que vimos $T_n \in \mathfrak{F}_n$ então $M_n = \max\limits_{m \leq n} T_m \in \mathfrak{F}_n$ donde concluímos que $M_N \in \mathfrak{F}_N$. Além disso, no caso de $S = \mathbb{R}$ e $f(x) = x$, temos $T_n = \sum\limits_{m \leq n} X_m = S_n$ e estamos na situação do Teorema 0.1.

QUESTÃO 1.6: Mostre que se $M \leq N$ são tempos de parada então $\mathfrak{F}_M \subset \mathfrak{F}_N$.

Resolução: Seja $A \in \mathfrak{F}_M$, então $A \in \mathfrak{F}$ e como $M \leq N$ temos para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A \cap \{N = n\} &= A \cap \{M \leq n\} \cap \{N = n\} \\ &= \bigcup_{m=1}^{n} A \cap \{M = m\} \cap \{N = n\}. \end{aligned}$$

Sendo N tempo de parada temos que $\{N = n\} \in \mathfrak{F}_n$, além disso como $A \in \mathfrak{F}_M$ temos que $A \cap \{M = m\} \in \mathfrak{F}_m \subset \mathfrak{F}_n$ para todo $m \leq n$. Logo $A \cap \{N = n\} = \bigcup\limits_{m=1}^{n} A \cap \{M = m\} \cap \{N = n\} \in \mathfrak{F}_n$, donde concluí-se que $A \in \mathfrak{F}_N$ e portanto $\mathfrak{F}_M \subset \mathfrak{F}_N$.

QUESTÃO 1.7: Mostre que se $L \leq M$ e $A \in \mathfrak{F}_L$ então

$$N = \begin{cases} L & \text{em } A \\ M & \text{em } A^c \end{cases} \text{ é um tempo de parada.}$$

Resolução: Dividindo o espaço em A e A^c e observando que $L \leq M$, podemos escrever para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \{N = n\} &= (A \cap \{L = n\}) \cup (\{L \leq n\} \cap A^c \cap \{M = n\}) \\ &= (A \cap \{L = n\}) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{n} \{L = m\} \cap A^c \cap \{M = n\} \right). \end{aligned}$$

Como $A \in \mathfrak{F}_L$ então $(A \cap \{L = n\}) \in \mathfrak{F}_n$. Além disso, temos pela questão 1.6 que, $\mathfrak{F}_L \subset \mathfrak{F}_M$, então $A \in \mathfrak{F}_M$ logo $A^c \in \mathfrak{F}_M$ ($\mathfrak{F}_M$ é σ-álgebra). Daí temos que $\{M = n\} \cap A^c \in \mathfrak{F}_n$, como $\bigcup\limits_{m=1}^{n} \{L = m\} \in \mathfrak{F}_n$ concluímos que $(A \cap \{L = n\}) \cup (\bigcup\limits_{m=1}^{n} \{L = m\} \cap A^c \cap \{M = n\}) \in \mathfrak{F}_n$. Logo N é tempo de parada.

QUESTÃO 1.8:

(i) Se $\mathbb{P}(\alpha < +\infty) < 1$ então $\mathbb{P}(\sup S_n < +\infty) = 1$.

(ii) Se $\mathbb{P}(\alpha < +\infty) = 1$ então $\mathbb{P}(\sup S_n = +\infty) = 1$.

Resolução:

(caso (i)): Note que $[\sup S_n = +\infty] \subseteq \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [\alpha_k < +\infty]$ então em particular $[\sup S_n = +\infty] \subseteq [\alpha_k < +\infty]$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\mathbb{P}([\sup S_n = +\infty]) \leq \mathbb{P}([\alpha_k < +\infty]) = \mathbb{P}([\alpha < +\infty])^k \longrightarrow 0,$$

portanto $\mathbb{P}(\sup S_n < +\infty) = 1$.

(caso (ii)): Sabemos por hipótese que $\mathbb{P}(\alpha < +\infty) = 1$, daí temos juntamente com a definição de α_n que $S_{\alpha_n} - S_{\alpha_{n-1}} > 0$ quase certamente, assim existe $\varepsilon > 0$ tal que $S_{\alpha_n} - S_{\alpha_{n-1}} > \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$ quase certamente, ou seja, $\mathbb{P}(S_{\alpha_n} - S_{\alpha_{n-1}} > \varepsilon) = 1$.

Seja $A_n := \{S_{\alpha_n} - S_{\alpha_{n-1}} > \varepsilon\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $S_{\alpha_0} = 0$. Como $\mathbb{P}(\alpha < +\infty) = 1$ temos pelo corolário visto em sala (aula do dia 28/03/14) que $X_{\alpha_{n-1}+1}, X_{\alpha_{n-1}+2}, \ldots, X_{\alpha_n}$ são variáveis aleatórias (v.a's) independentes e identicamente distribuídas, donde concluímos que as $A_{n's}$ são v.a's independentes.

Além disso, temos que $\mathbb{P}(A_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty$ e pelo Lema de Borel-Cantelli item (b) chegamos que $\mathbb{P}(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1$, ou seja, $\sup S_n = +\infty$ com probabilidade 1.

(Outro modo de resolução de (ii)): Seja $Y_n := S_{\alpha_n} - S_{\alpha_{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $S_{\alpha_0} = 0$. Como $\mathbb{P}(\alpha < +\infty) = 1$ temos pelo corolário visto em sala (aula do dia 28/03/14) que $X_{\alpha_{n-1}+1}, X_{\alpha_{n-1}+2}, \ldots, X_{\alpha_n}$ são v.a's independentes e identicamente distribuídas, donde concluímos que os $Y_{n's}$ também são v.a's i.i.d.. Aqui temos dois casos a considerar $\mathbb{E}(Y_1) < +\infty$ ou $\mathbb{E}(Y_1) = +\infty$.

Caso $\mathbb{E}(Y_1) < +\infty$: Note que $0 < S_\alpha = Y_1 < +\infty$, pois caso $Y_1 = S_\alpha = +\infty$ não teríamos novos recordes mas $\mathbb{P}(\alpha < +\infty) = 1$ o que garante a existência de novos recordes. Daí temos que $0 < \mathbb{E}(Y_1) < +\infty$ e pela Lei Fraca para v.a's *i.i.d.* com 1º momento finito temos que

$$\frac{S_{\alpha_n}}{n} = \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}(Y_1).$$

Caso $\mathbb{P}(\sup S_{\alpha_n} < +\infty) = 1$ teríamos $\frac{S_{\alpha_n}}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ mas vimos que $\mathbb{E}(Y_1) > 0$. Assim, concluímos que $\mathbb{P}(\sup S_{\alpha_n} = +\infty) = 1$.

Caso $\mathbb{E}(Y_1) = +\infty$ temos pela recíproca para a Lei Forte de Kolmogorov que

$$\frac{S_{\alpha_n}}{n} = \frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n} \to +\infty \quad q.c.$$

Logo $\sup S_n = +\infty$ com probabilidade 1.

Lista II

Capítulo 4 - (Data 07/04/14)

QUESTÃO 1.12: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias *i.i.d* com distribuição uniforme em $(0,1)$, seja $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, e seja $T = \inf\{n : \ S_n > 1\}$. Mostre que $\mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{n!}$, $\mathbb{E}(T) = e$ e $\mathbb{E}(S_T) = \frac{e}{2}$.

Resolução: Sabendo que as $X_{i's}$ são *i.i.d* com distribuição uniforme em $(0,1)$, temos que cada X_i possue densidade

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \ \ x \in (0,1) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Assim,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & se \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (0,1)^n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Usando que, $\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(S_k \leq 1,\ k = 1, \ldots, n) = \int \cdots \int_B f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$, temos que $\mathbb{P}(T > n) = \int \cdots \int_B dx_1 dx_2 \cdots dx_n$.

Observe que para $k = 2$ (é fácil ver via a figura 3) que $\mathbb{P}(S_2 \leq 1) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x_1} dx_2 dx_1$.

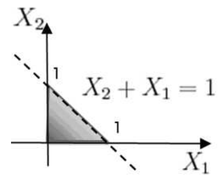

Figura 1: $\mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq 1)$

No caso $k = 3$ temos $\mathbb{P}(S_3 \leq 1) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x_3} \int\limits_0^{1-x_1-x_2} dx_3 dx_2 dx_1$. Veja figura 2.

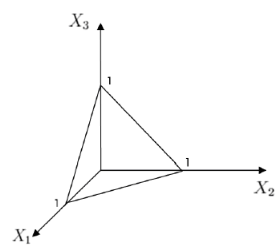

Figura 2: $\mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 \leq 1)$

Ou seja, estamos interessados em calcular o volume do sólido limitado pelos hiperplanos $X_1 = 0,\ X_2 = 0, \ldots, X_n = 0$ e $X_1 + \ldots + X_n = 1$. Desta forma para $k = n$ temos

$$\mathbb{P}(S_n \leq 1) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x_1} \int\limits_0^{1-x_1-x_2} \cdots \int\limits_0^{1-x_2-\ldots-x_n} dx_n dx_{n-1} \ldots dx_1. \tag{1}$$

Fazendo agora uma mudança de variáveis, tomando $y_1 = 1 - x_1,\ y_2 = 1 - (x_1 + x_2), \ldots, y_n = 1 - (x_1 + \ldots + x_n)$. Temos que $\frac{dx_1}{dy_1} = \frac{dx_2}{dy_2} = \ldots = \frac{dx_n}{dy_n} = -1$ e mais, para $n \geq 1$, quando $x_n = 0$ temos $y_n = 1 - (x_1 + \ldots + x_{n-1}) = y_{n-1}$ e caso $x_n = 1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}$, $(X_1 = 0)$ temos $y_n = 0$. Deste modo podemos escrever

$$\int_1^0 \int_{y_n}^0 \int_{y_{n-1}}^0 \ldots \int_{y_2}^0 (-1)^n dy_1 dy_2 \ldots dy_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^{y_n} \int_0^{y_{n-1}} \ldots \int_0^{y_2} (-1)^n dy_1 dy_2 \ldots dy_n.$$

Afirmação: $\int_0^y \int_0^{x_n} \int_0^{x_{n-1}} \ldots \int_0^{x_2} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \frac{y^n}{n!}$.

De fato, note que para $n = 2$ temos

$$\int_0^y \int_0^{x_2} dx_1 dx_2 = \int_0^y x_2 dx_2 = (x_2^2/2)|_0^y = \frac{y^2}{2} = \frac{y^2}{2!}.$$

Supondo o resultado válido para n, verifiquemos que vale para $n+1$. Como,

$$\int_0^y \int_0^{x_{n+1}} \int_0^{x_n} \ldots \int_0^{x_2} dx_1 dx_2 \ldots dx_{n+1} = \int_0^y \frac{x_{n+1}^n}{n!} dx_{n+1} = \frac{y^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Portanto, $\mathbb{P}(T > n) = \frac{1}{n!}$.

Vamos agora calcular a $\mathbb{E}(T)$, sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i\mathbb{P}(T = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\mathbb{P}([T > i-1] - [T > i]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} i(\mathbb{P}([T > i-1]) - \mathbb{P}([T > i])), \text{ (pois } [T > i] \subset [T > i-1]) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{(i-1)!} - \frac{1}{i!}\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{i-1}{(i-1)!} \\
&= \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i-1}{(i-1)!} = \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{(i-2)!} = e.
\end{aligned}$$

Usando agora que as $X_{i's} \sim U(0,1)$ concluímos que $\mathbb{E}(|X_i|) = \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1) = \int_0^1 x dx = 1/2$. Assim pela equação de Wald temos que $\mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(T) = \frac{e}{2}$.

QUESTÃO 1.13: Sejam $X_1, X_2, \ldots$ independentes e identicamente distribuídas com $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p > 1/2$ e $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$, sejam $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\alpha = \inf\{m : \ S_m > 0\}$ e $\beta = \inf\{n : \ S_n < 0\}$.

(i) Use o exercício 4.1.9 para concluir que $\mathbb{P}(\alpha < \infty) = 1$ e $\mathbb{P}(\beta < \infty) < 1$.

(ii) Se $Y = \inf S_n$, então $\mathbb{P}(Y \leq -k) = \mathbb{P}(\beta < \infty)^k$.

(iii) Aplique a Equação de Wald em $\alpha \wedge n$ e faça $n \longrightarrow \infty$ para concluir que $\mathbb{E}(\alpha) = \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)} = \frac{1}{2p-1}$. Compare com o exercício 4.1.10 mostrando que $\mathbb{P}(\overline{\beta} = \infty) = 2p - 1$.

Resolução:

(i) Como $\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(X_1)$ para todo $i = 2, 3 \ldots$, e

$$\mathbb{E}(X_1) = 1 \cdot \mathbb{P}(X_1 = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X_1 = -1) = p - (1 - p) = 2p - 1,$$

temos pela Lei Forte de kolmogorov que $\frac{S_n}{n} \overset{q.c}{\longrightarrow} 2p - 1$.

Assim se $\lim S_n < +\infty$ temos que $\frac{S_n}{n} \longrightarrow 0$, mas (2p-1)>0 pois $p > 1/2$. Logo $S_n \longrightarrow +\infty$ e portanto $\mathbb{P}(\alpha < \infty) = 1$ e pelo Teorema 1 (lista I) se $S_n \longrightarrow +\infty$ com probabilidade 1 então $\liminf S_n > -\infty$ com probabilidade menor que 1, logo $\mathbb{P}(\beta < \infty) < 1$.

(ii) Note que $\mathbb{P}(Y \leq -k) = \mathbb{P}(\inf S_n \leq -k) = \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -1, \ldots, X_k = -1)$ como os $X_{i's}$ são independentes

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -1, \ldots, X_k = -1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = -1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_k = -1)$$

sendo os $X_{i's}$ identicamente distribuidos chegamos que

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = -1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(X_k = -1) = \mathbb{P}(X_1 = -1)^k = \mathbb{P}(\beta < \infty)^k.$$

Portanto, $\mathbb{P}(Y \leq -k) = \mathbb{P}(\beta < \infty)^k$.

(iii) Como vimos no exercício 3 da lista I, se α é tempo de parada então $\alpha \wedge n$ também é tempo de parada. Usando que $\alpha \wedge n \leq \alpha$ concluímos que $\mathbb{E}(\alpha \wedge n) \leq \mathbb{E}(\alpha) < \infty$, pois $\mathbb{P}(\alpha < \infty) = 1$.

Também vimos no item (i) que $\mathbb{E}(X_1) < \infty$. Pela equação de Wald chegamos que $\mathbb{E}(S_{\alpha \wedge n}) = \mathbb{E}(X_1) \cdot \mathbb{E}(\alpha \wedge n)$.

Como $0 < (\alpha \wedge n) \leq (\alpha \wedge n)$ e $(\alpha \wedge n) \nearrow \alpha$ quando $n \longrightarrow +\infty$, temos pelo Teorema da Convergência Monótona que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \mathbb{E}(\alpha \wedge n) = \mathbb{E}(\alpha)$.

Por (i), $\mathbb{P}(\alpha < \infty) = 1$, logo $S_{\alpha\wedge n} \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} S_\alpha$. Como por definição, $S_\alpha > 0$ concluímos que $S_\alpha = 1$ ($X = 1$ ou $X = -1$).

Como $S_{\alpha\wedge n}$ também é monótona crescente e $S_{\alpha\wedge n} \leq S_\alpha = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos pelo Teorema da Convergência Dominada que,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}(S_{\alpha\wedge n}) = \mathbb{E}(S_\alpha) = \mathbb{E}(1) = 1.$$

Assim, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}(S_{\alpha\wedge n}) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} (\mathbb{E}(X_1)\cdot\mathbb{E}(\alpha\wedge n)) = \mathbb{E}(X_1)\cdot\mathbb{E}(\alpha)$. Portanto, $1 = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}(S_{\alpha\wedge n}) = \mathbb{E}(X_1)\cdot\mathbb{E}(\alpha)$, ou seja, $\mathbb{E}(\alpha) = \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)} = \frac{1}{2p-1}$.

Pelo exercício 4.1.10 item (ii) temos que $\mathbb{E}(\alpha) = \frac{1}{\mathbb{P}(\overline{\beta}=\infty)}$, assim pelo que acabamos de ver $\frac{1}{\mathbb{P}(\overline{\beta}=\infty)} = \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)} = \frac{1}{2p-1}$, ou seja, $\mathbb{P}(\overline{\beta} = \infty) = 2p - 1$.

QUESTÃO 1.14: Um problema de parada ótima: Sejam X_n, $n \geq 1$ $i.i.d$ com $\mathbb{E}(X_1^+) < \infty$ e sejam

$$Y_n = \max_{1\leq m\leq n} X_m - cn.$$

Isto é, estamos olhando para um grande valor de X, mas nós temos que pagar c> 0 para cada observação.

(i) Seja $T = \inf\{n :\ X_n > a\}$, $p = \mathbb{P}(X_n > a)$ e calcule $\mathbb{E}(Y_T)$.

(ii) Seja α (possivelmente <0) a única solução para $\mathbb{E}(X_1 - \alpha)^+ = c$. Mostre que $\mathbb{E}(Y_T) = \alpha$, neste caso, utilizar a desigualdade

$$Y_n \leq \alpha + \sum_{m=1}^{n}((X_m - \alpha)^+ - c)$$

para $n \geq 1$ e conclua que se $\tau \geq 1$ é um tempo de parada com $\mathbb{E}(\tau) < \infty$, então $\mathbb{E}(Y_\tau) \leq \alpha$.

A análise acima assume que você tem que jogar pelo menos uma vez. Se o ideal $\alpha < 0$, então você não deve jogar em tudo.

Resolução:

(i) Como $Y_T = \max_{1\leq m\leq T} X_m - cT = X_T - cT$ temos que $\mathbb{E}(Y_T) = \mathbb{E}(X_T) - c\mathbb{E}(T)$.

Observe que T tem distribuição geométrica, já que as $X_{i's}$ são independentes e para:

$$
\begin{aligned}
T &= 1 \text{ temos que } \mathbb{P}(T=1) = \mathbb{P}(X_1 > a) = p \\
T &= 2 \text{ temos que } \mathbb{P}(T=2) = \mathbb{P}(X_1 \leq a, X_2 > a) = \mathbb{P}(X_1 \leq a) \cdot \mathbb{P}(X_2 > a) = (1-p) \cdot p; \\
T &= 3 \text{ temos que } \mathbb{P}(T=3) = \mathbb{P}(X_1 \leq a) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq a) \cdot \mathbb{P}(X_2 > a) = (1-p)^2 \cdot p; \\
&\vdots \\
T &= k \text{ temos que } \mathbb{P}(T=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p.
\end{aligned}
$$

Assim, $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{p}$. Portanto $\mathbb{E}(Y_T) = \mathbb{E}(X_T) - \frac{c}{p}$. Precisamos agora calcular $\mathbb{E}(X_T)$.

Sejam $Z_1 = X_1 \mathbb{I}_{[X_1 > a]}$,$Z_2 = X_2 \mathbb{I}_{[X_2 > a]}, \ldots$ assim temos que $Z_1, Z_2, \ldots$ são variáveis aleatórias *i.id.* (pois as $X_{i's}$ o são). Note que definindo $S_n = Z_1 + \ldots + Z_n$ temos que $S_T = X_T$. Como $\mathbb{E}(|Z_1|) = \mathbb{E}(|X_1 \cdot \mathbb{I}_{[X_2 > a]}|) = \mathbb{E}(|X_1| \cdot \mathbb{I}_{[X_1 > a]}) \leq \mathbb{E}(X_1^+) < \infty$ concluímos pela equação de Wald que

$$
\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(S_T) = \mathbb{E}(Z_1) \cdot \mathbb{E}(T) = \frac{\mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbb{I}_{[X_1 > a]})}{p}. \tag{2}
$$

mas podemos ainda escrever

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbb{I}_{[X_1 > a]})}{p} &= \frac{\mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbb{I}_{[X_1 > a]})}{p} - a + a = \frac{\mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbb{I}_{[X_1 > a]})}{p} - a\frac{\mathbb{E}(\mathbb{I}_{[X_1 > a]})}{p} + a \\
&= \frac{\mathbb{E}((X_1 - a) \cdot \mathbb{I}_{[X_1 > a]})}{p} + a = a + \frac{\mathbb{E}(X_1 - a)^+}{p}.
\end{aligned}
$$

Deste modo podemos reescrever

$$
\mathbb{E}(Y_T) = \mathbb{E}(X_T) - \frac{c}{p} = \frac{\mathbb{E}(X_1 \cdot \mathbb{I}_{[X_1 > a]}) - c}{p} = a + \frac{\mathbb{E}(X_1 - a)^+ - c}{p}.
$$

(ii) Usando (i) temos que $\mathbb{E}(Y_T) = a + \dfrac{\mathbb{E}(X_1 - a)^+ - c}{p}$. Seja α (possivelmente <0) a única solução para $\mathbb{E}(X_1 - \alpha)^+ = c$. Se $a = \alpha$ podemos escrever

$$
\mathbb{E}(Y_T) = \alpha + \frac{\mathbb{E}(X_1 - \alpha)^+ - c}{p} = \alpha.
$$

Além disso, definindo $W_1 = (X_1 - \alpha)^+, W_2 = (X_2 - \alpha)^+, \ldots$ temos que as v.a's $W_{i's}$ são *i.i.d.*, já que as $X_{i's}$ o são.

Temos por hipótese que $\mathbb{E}|W_1| = \mathbb{E}(X_1 - \alpha)^+ < +\infty$. Se $\tau \geq 1$ é tempo de parada com $\mathbb{E}(\tau) < \infty$ concluímos pela equação de Wald que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{m=1}^{\tau} W_m\right) = \mathbb{E}(W_1) \cdot \mathbb{E}(\tau) = c\mathbb{E}(\tau).$$

Utilizando o fato de $Y_n \leq \alpha + \sum_{m=1}^{n}((X_m - \alpha)^+ - c)$ para todo $n \geq 1$ concluímos que

$$\mathbb{E}(Y_\tau) \leq \mathbb{E}(\alpha) + \mathbb{E}\left(\sum_{m=1}^{\tau} W_m\right) - c\mathbb{E}(\tau) = \mathbb{E}(\alpha) + c\mathbb{E}(\tau) - c\mathbb{E}(\tau) = \alpha.$$

QUESTÃO 1.15: (Segunda Equação de Wald) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ v.a's i.i.d. com $\mathbb{E}(X_n) = 0$ e $\mathbb{E}(X_n^2) = \sigma^2 < \infty$. Se T é tempo de parada com $\mathbb{E}(T) < \infty$ então $\mathbb{E}(S_T^2) = \sigma^2\mathbb{E}(T)$.

Resolução: Como,

$$\begin{aligned} S_{T\wedge n}^2 &= (S_{T\wedge n-1} + X_{T\wedge n})^2 = S_{T\wedge n-1}^2 + 2X_{T\wedge n}S_{T\wedge n-1} + X_{T\wedge n}^2 \\ &= S_{T\wedge n-1}^2 + (2X_nS_{n-1} + X_n^2)\mathbb{I}_{[T\geq n]} \end{aligned}$$

temos que $\mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2) = \mathbb{E}(S_{T\wedge n-1}^2) + \mathbb{E}(2X_nS_{n-1}\mathbb{I}_{[T\geq n]}) + \mathbb{E}(X_n^2\mathbb{I}_{[T\geq n]})$.

Como as $X_i's$ são independentes temos que S_{n-1} e X_n são independentes, logo $\mathbb{E}(2X_nS_{n-1}\mathbb{I}_{[T\geq n]}) = 2\mathbb{E}(X_n) \cdot \mathbb{E}(S_{n-1})\mathbb{P}(T \geq n) = 0$, pois $\mathbb{E}(X_n) = 0$. Desta forma temos que

$$\mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2) = \mathbb{E}(S_{T\wedge n-1}^2) + \mathbb{E}(X_n^2)\mathbb{P}(T \geq n) = \mathbb{E}(S_{T\wedge n-1}^2) + \sigma^2\mathbb{P}(T \geq n).$$

De modo análogo, só que agora considerando $S_{T\wedge n-1}^2 = (S_{T\wedge n-2} + X_{T\wedge n-1})^2$, chegaremos que

$$\mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2) = \mathbb{E}(S_{T\wedge n-2}^2) + \sigma^2\mathbb{P}(T \geq n-1) + \sigma^2\mathbb{P}(T \geq n).$$

Procedendo desta forma concluímos que

$$\mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2) = \sigma^2\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(T \geq k).$$

Daí temos para quaisquer $n > m$

$$\mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2 - S_{T\wedge m}^2) = \mathbb{E}(X_{T\wedge m+1} + \ldots + X_{T\wedge n})^2 = \sigma^2 \sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}(T \geq k).$$

Como $\sum_{k=m+1}^{n} \mathbb{P}(T \geq k) \leq \mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq k) < \infty$ concluímos que $S_{T\wedge n}$ é uma sequência de Cauchy em L^2, logo converge. Por um lado, usando o Teorema da Convergência Monótona temos, $\mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2) \xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} E(S_T^2)$.

Por outro lado, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{E}(S_{T\wedge n}^2) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T \geq k) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq k) = \sigma^2\mathbb{E}(T)$. Portanto $E(S_T^2) = \sigma^2\mathbb{E}(T)$.

Capítulo 5

Lista III - (Data 14/04/14)

QUESTÃO 1.1: Generalize o argumento anterior para mostrar que se $X_1 = X_2$ em $B \in \mathfrak{F}$, então $\mathbb{E}(X_1|\mathfrak{F}) = \mathbb{E}(X_2|\mathfrak{F})$ quase certamente em B.

Resolução: Sejam $Y_1 = \mathbb{E}(X_1|\mathfrak{F})$ e $Y_2 = \mathbb{E}(X_2|\mathfrak{F})$, usando a definição de esperança condicional e a hipótese de $X_1 = X_2$ em $B \in \mathfrak{F}$ temos,

$$\int_B Y_1 d\mathbb{P} = \int_B X_1 d\mathbb{P} = \int_B X_2 d\mathbb{P} = \int_B Y_2 d\mathbb{P}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ e considere $A = ([Y_1 - Y_2 \geq \varepsilon > 0] \cap B) \in \mathfrak{F}$, assim

$$0 = \int_A (X_1 - X_2) d\mathbb{P} = \int_A (Y_1 - Y_2) d\mathbb{P} \geq \varepsilon\mathbb{P}(A).$$

Então $\mathbb{P}(A) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$, logo $\mathbb{P}([Y_1 - Y_2 > 0] \cap B) = 0$ então $Y_1 \geq Y_2$ em B quase certamente.

Por simétria ($A = ([Y_2 - Y_1 \geq \varepsilon > 0] \cap B)$) chegaremos que $Y_2 \geq Y_1$ em B quase certamente. Logo $Y_1 = Y_2$ em $B \in \mathfrak{F}$ quase certamente.

QUESTÃO 1.2:(Formúla de Bayes) Se $G \in \mathfrak{g}$ mostre que $\mathbb{P}(G|A) = \frac{\int_G \mathbb{P}(A|\mathfrak{g}) d\mathbb{P}}{\int_\Omega \mathbb{P}(A|\mathfrak{g}) d\mathbb{P}}$, quando $\mathfrak{g}$

é a σ-álgebra gerada por uma partição, isto se reduz à formúla de Bayes usual

$$\mathbb{P}(G_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|G_i)\cdot\mathbb{P}(G_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A|G_j)\cdot\mathbb{P}(G_j)}.$$

Resolução: Como $\mathbb{P}(A|\mathfrak{g}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\mathfrak{g})$ temos que $\int_G \mathbb{P}(A|\mathfrak{g})d\mathbb{P} = \int_G \mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\mathfrak{g})d\mathbb{P} = \int_G \mathbb{I}_A d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A\cap G)$ e $\int_\Omega \mathbb{P}(A|\mathfrak{g})d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{E}(\mathbb{I}_A|\mathfrak{g})d\mathbb{P} = \int_\Omega \mathbb{I}_A d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$.

Sabendo que $\mathbb{P}(G|A) = \frac{\mathbb{P}(G\cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ temos que $\mathbb{P}(G|A) = \frac{\int_G \mathbb{P}(A|\mathfrak{g})d\mathbb{P}}{\int_\Omega \mathbb{P}(A|\mathfrak{g})d\mathbb{P}}$.

Note que quando $\mathfrak{g}$ é a σ-álgebra gerada por uma partição, temos pelo que acabamos de ver $\mathbb{P}(G_i|A) = \frac{\int_{G_i} \mathbb{P}(A|\mathfrak{g})d\mathbb{P}}{\int_\Omega \mathbb{P}(A|\mathfrak{g})d\mathbb{P}}$.

Como $\int_{G_i} \mathbb{P}(A|\mathfrak{g})d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A\cap G_i) = \mathbb{P}(A|G_i)\cdot\mathbb{P}(G_i)$ e usando que $\Omega = \sum_j G_j$ é uma partição temos $\int_{\Omega=\sum_j G_j} \mathbb{P}(A|\mathfrak{g})d\mathbb{P} = \mathbb{P}((\sum_j G_j)\cap A) = (\mathbb{P}(\sum_j(G_j\cap A)) = \sum_j \mathbb{P}(G_j\cap A) = \sum_j \mathbb{P}(A|G_j)\cdot\mathbb{P}(G_j)$. Portanto,

$$\mathbb{P}(G_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|G_i)\cdot\mathbb{P}(G_i)}{\sum_j \mathbb{P}(A|G_j)\cdot\mathbb{P}(G_j)}.$$

QUESTÃO 1.3: Prove a desigualdade de Chebyshev: Se $a > 0$ então

$$\mathbb{P}(|X| \geq a|\mathfrak{F}) \leq a^{-2}\mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F}).$$

Resolução: Se $a > 0$ temos para qualquer $B \in \mathfrak{F}$,

$$\begin{aligned}
\int_B \mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F})d\mathbb{P} &= \int_B X^2 d\mathbb{P} = \int_{B\cap[|X|\geq a]} X^2 d\mathbb{P} + \int_{B\cap[|X|<a]} X^2 d\mathbb{P} \\
&\geq \int_{B\cap[|X|\geq a]} X^2 d\mathbb{P} = \int_B X^2\cdot\mathbb{I}_{[|X|\geq a]}d\mathbb{P} \geq a^2\int_B \mathbb{I}_{[|X|\geq a]}d\mathbb{P} \\
&= a^2\int_B \mathbb{E}(\mathbb{I}_{[|X|\geq a]}|\mathfrak{F})d\mathbb{P} = \int_B a^2\mathbb{P}([|X|\geq a]|\mathfrak{F})d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Como o $B \in \mathfrak{F}$ é qualquer temos que $a^2\mathbb{P}(|X|\geq a|\mathfrak{F}) \leq \mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F})$.

QUESTÃO 1.4: Suponha $X \geq 0$ e $\mathbb{E}(X) = \infty$ (não há nada para provar quando $\mathbb{E}(X) < \infty$). Mostre que existe único Y $\mathfrak{F}$-mensurável com $0 \leq Y \leq \infty$, então

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}, \quad \forall\ A \in \mathfrak{F}.$$

Dica: Seja $X_M = X \wedge M$, $Y_M = \mathbb{E}(X_M|\mathfrak{F})$ e tome $M \to +\infty$.

Resolução: Denote $X_M = X \wedge M$ e $Y_M = \mathbb{E}(X_M|\mathfrak{F})$. Note que para todo $M \leq N$ temos $0 \leq (X \wedge M) \leq (X \wedge N)$, ou seja, a variável aleatória X_M é monotona crescente. Como a esperança condicional é monotona concluímos que Y_M também é monotona crescente. Além disso, temos que $X_M \nearrow X$ quando $M \to +\infty$ quase certamente. Seja $Y := \lim\limits_{M\to+\infty} Y_M$, assim pelo Teorema da Convergencia Monótona temos para todo $A \in \mathfrak{F}$

$$\begin{aligned}\int_A X d\mathbb{P} &= \lim_{M\to+\infty}\int_A X_M d\mathbb{P} = \lim_{M\to+\infty}\int_A \mathbb{E}(X_M|\mathfrak{F})d\mathbb{P}\\ &= \int_A \lim_{M\to+\infty} Y_M d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Para mostrar a unicidade vamos separa em dois casos, quando $0 \leq Y < +\infty$ e quando $Y = +\infty$.

Suponha que exista $0 \leq Y' \leq +\infty$ $\mathfrak{F}$-mensurável com

$$\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y' d\mathbb{P}, \quad \forall\ A \in \mathfrak{F}.$$

Considere inicialmente o caso $0 \leq Y < +\infty$. Sendo assim, seja $A = [Y' - Y \geq \varepsilon > 0]$ e deste modo temos

$$0 = \int_A (X - X)d\mathbb{P} = \int_A (Y' - Y)d\mathbb{P} \geq \varepsilon\mathbb{P}(A),$$

isto implica que $\mathbb{P}(A) = 0$. Logo $\mathbb{P}(Y' - Y > 0) = 0$ e portanto $Y' \leq Y$ quase certamente, isso também assegura que $Y' < \infty$ quase certamente e podemos usar simétria ($A = [Y - Y' \geq \varepsilon > 0]$) para garantir que $Y' = Y$ quase certamente.

Caso $Y = +\infty$, considere $K \in \mathbb{N}$ qualquer e $B = [Y' \leq K]$ por hipótese temos que $\int_A Y d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y' d\mathbb{P}, \ \ \forall\ A \in \mathfrak{F}$. Desta forma se $\mathbb{P}(B) \neq 0$ temos $+\infty = \int_B Y d\mathbb{P} = \int_B Y' d\mathbb{P} \leq K\mathbb{P}(B) < +\infty$, absurdo. Logo $\mathbb{P}(B) = 0$ para qualquer $K \in \mathbb{N}$, ou seja, $Y' = +\infty = Y$ quase certamente.

QUESTÃO 1.5: Prove a Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\mathbb{E}(XY|\mathfrak{F})^2 \leq \mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F}) \cdot \mathbb{E}(Y^2|\mathfrak{F}).$$

Resolução: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{E}((X+\alpha Y)^2|\mathfrak{F}) &= \mathbb{E}((X^2+2\alpha XY+\alpha^2 Y^2)|\mathfrak{F}) = \text{(por linearidade)} \\ &= \mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F}) + 2\alpha \mathbb{E}(XY|\mathfrak{F}) + \alpha^2 \mathbb{E}(Y^2|\mathfrak{F}). \end{aligned}$$

Assim temos uma inequação do segundo grau em função de α. Denotando por simplicidade $A = \mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F})$, $B = \mathbb{E}(XY|\mathfrak{F})$ e $C = \mathbb{E}(Y^2|\mathfrak{F})$ ficamos com $A + 2B\alpha + C\alpha^2 \geq 0$. Daí temos que $\Delta \leq 0$, portanto $(2B)^2 - 4AC \leq 0$, ou seja, $B^2 \leq AC$. O que mostra que

$$\mathbb{E}(XY|\mathfrak{F})^2 \leq \mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F}) \cdot \mathbb{E}(Y^2|\mathfrak{F}).$$

Capítulo 5

Lista III - (Data 22/04/14)

QUESTÃO 1.6: Dar um exemplo em $\Omega = \{a, b, c\}$ em que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_1)|\mathfrak{F}_2) \neq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_2)|\mathfrak{F}_1)$.

Resolução: Considere $\mathfrak{F}_1 = \sigma(\{a\}) = \{\varnothing, \Omega, \{a\}, \{b, c\}\}$ e $\mathfrak{F}_2 = \sigma(\{c\}) = \{\varnothing, \Omega, \{c\}, \{a, b\}\}$ e defina $X(a) = 1$, $X(b) = 2$ e $X(c) = 3$ com $\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}(\{b\}) = \mathbb{P}(\{c\}) = 1/3$.

Assim, podemos calcular $\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_1)$ e $\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_2)$. Vamos fazer os calculos para $\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_1)$ e $\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_2)$ é análogo. Sabemos $\{a\}$ é mensurável a $\sigma-$algebra $\mathfrak{F}_1$ então $\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_1)(a) = X(a) = 1$, além disso temos que $\{b\}$ e $\{c\}$ não são mensuráveis em $\mathfrak{F}_1$, e como a $\sigma-$algebra $\mathfrak{F}_1 = \{\varnothing, \Omega, \{a\}, \{b, c\}\}$ então $\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_1)(b) = \mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_1)(c) = K$, K uma constante. Para encontrar a constante K usamos a definição de esperança condicional, pois

$$5/3 = 2 \cdot 1/3 + 3 \cdot 1/3 = \int_{\{b,c\}} X d\mathbb{P} = \int_{\{b,c\}} \mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_1) d\mathbb{P} = K(\mathbb{P}(\{b\}) + \mathbb{P}(\{c\})) = 2K/3$$

então $K = 5/2$.

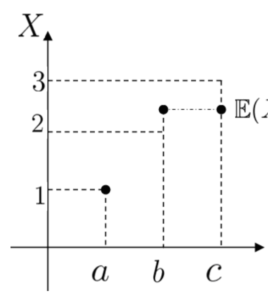

Figura 3: Gráfico da $\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_1)$.

De modo similar obtemos $\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_2)(a) = \mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_2)(b) = 3/2$ e $\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_2)(c) = X(c) = 3$. Assim repetindo novamente o processo para $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_1)|\mathfrak{F}_2)$ e $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_2)|\mathfrak{F}_1)$ obtemos, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_1)|\mathfrak{F}_2)(c) = \mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_1)(c) = 5/2$ (pois $\{c\}$ é mensurável em $\mathfrak{F}_2$) mas $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_2)|\mathfrak{F}_1)(c) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_2)|\mathfrak{F}_1)(b) = K$ e como

$$3/2 = (3/2) \cdot (1/3) + 3 \cdot (1/3) = \int_{\{b,c\}} \mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_2) d\mathbb{P} = \int_{\{b,c\}} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_2)|\mathfrak{F}_1) d\mathbb{P} = 2K/3$$

então $K = 9/2$ e portanto $9/4 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_2)|\mathfrak{F}_1)(c) \neq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}_1)|\mathfrak{F}_2)(c) = 5/2$.

QUESTÃO 1.7: Mostre que quando $\mathbb{E}|X|, \mathbb{E}|Y|$ e $\mathbb{E}|XY|$ são finitos, cada afirmação implica o próximo e dar exemplos com $X, Y \in \{-1, 0, 1\}$ que mostram que as implicações reversas são falsas: (i) X e Y são independentes, (ii) e $\mathbb{E}(Y|X) = EY$, (iii) e $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Resolução:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Considere $\mathfrak{F}_1 = \sigma(X)$, como X e Y são independentes temos que Y é independente de $\mathfrak{F}_1$. Já vimos (exemplo feito em aula) que se Y é independente de $\mathfrak{F}_1$ então $\mathbb{E}(Y|\mathfrak{F}_1) = \mathbb{E}(Y)$.

$(ii) \nRightarrow (i)$ Considere $\Omega = \{a, b, c\}$ e defina $X(a) = X(b) = Y(a) = 1$, $X(c) = Y(c) = 0$ e $Y(b) = -1$, com $\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}(\{b\}) = \mathbb{P}(\{c\}) = 1/3$, onde e $\sigma(X) = \sigma(\{c\})$. Note que $\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot (1/3) + (-1) \cdot (1/3) + 0 \cdot (1/3) = 0$ e $\mathbb{E}(Y|X)(c) = Y(c) = 0$ e mais $\mathbb{E}(Y|X)(a) = \mathbb{E}(Y|X)(b) = K$ e calculando temos,

$$0 = 1 \cdot (1/3) + (-1) \cdot (1/3) = \int_{\{a,b\}} Y d\mathbb{P} = \int_{\{b,c\}} \mathbb{E}(Y|X) d\mathbb{P} = 2k/3,$$

logo $K = 0$ e portanto $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$. No entanto $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1/3 \neq \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0) = 1/9$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Pela propriedade 6 (vista em sala) temos que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|\mathfrak{F}_1))$, mas como $X \in \mathfrak{F}_1$ e $\mathbb{E}|Y|$, $\mathbb{E}|XY|$ são finitos temos por proposição visto em sala que, $\mathbb{E}(XY|\mathfrak{F}_1) = X\mathbb{E}(Y|\mathfrak{F}_1)$. Assim, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|\mathfrak{F}_1)) = \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|\mathfrak{F}_1)) = \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y)) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

$(iii) \nRightarrow (ii)$ Considere $\Omega = \{a, b, c\}$ e defina $X(a) = X(b) = Y(a) = 1$, $X(c) = Y(c) = 0$ e $Y(b) = -1$, com $\mathbb{P}(\{a\}) = \mathbb{P}(\{b\}) = 1/4$ e $\mathbb{P}(\{c\}) = 1/2$, onde e $\sigma(X) = \sigma(\{a\})$. Note que $\mathbb{E}(XY) = 1 \cdot \mathbb{P}(\{a\}) + (-1) \cdot \mathbb{P}(\{b\}) + 0 \cdot \mathbb{P}(\{c\}) = 0$, $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(\{a\}) + (0) \cdot \mathbb{P}(\{b\}) + 0 \cdot \mathbb{P}(\{c\}) = 1/4$ e $\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \mathbb{P}(\{a\}) + (-1) \cdot \mathbb{P}(\{b\}) + 0 \cdot \mathbb{P}(\{c\}) = 0$, logo $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$. Mas $\mathbb{E}(Y|X)(a) = Y(a) = 1 \neq \mathbb{E}(Y)$.

QUESTÃO 1.8: Mostre que se $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{F}$ e $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ então

$$\mathbb{E}(\{X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{F})\}^2) + \mathbb{E}(\{\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{g})\}^2) = \mathbb{E}(\{X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{g})\}^2).$$

Resolução: Seja $Z = \mathbb{E}(X|\mathfrak{F}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{g})$, como $\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}), \mathbb{E}(X|\mathfrak{g}) \in \mathfrak{F}$ temos que $Z \in \mathfrak{F}$. Além disso, $Z \in L^2(\mathfrak{F})$, pois

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|Z|^2) &= \mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{g})|^2) \leq \mathbb{E}((|\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})| + |\mathbb{E}(X|\mathfrak{g})|)^2) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})^2 + 2|\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})| \cdot |\mathbb{E}(X|\mathfrak{g})| + \mathbb{E}(X|\mathfrak{g})^2) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})^2) + 2\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})| \cdot |\mathbb{E}(X|\mathfrak{g})|) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{g})^2) \\
&\leq \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})\mathbb{E}(X|\mathfrak{g})|) + \mathbb{E}(X^2) \quad \text{(contração fraca em } L^2(\mathfrak{F})) \\
&= 2\mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})\mathbb{E}(X|\mathfrak{g})|) \quad \text{(por Cauchy-Schwarz)} \\
&\leq 2\mathbb{E}(X^2) + 2\sqrt{\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})^2) \cdot \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{g})^2)} \\
&\leq 2\mathbb{E}(X^2) + 2\sqrt{\mathbb{E}(X^2) \cdot \mathbb{E}(X^2)} < +\infty.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{F}) + Z)^2 &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{F}))^2 + 2\mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{F})]Z) + \mathbb{E}(Z)^2 \\
&= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{F}))^2 + \mathbb{E}(Z)^2, \qquad (3)
\end{aligned}$$

pois $(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{F})) \perp Z$ (já que $Z \in L^2(\mathfrak{F})$), logo $\mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{F})]Z) = 0$. Desta forma substituindo Z em (3) obtemos,

$$\mathbb{E}(\{X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{g})\}^2) = \mathbb{E}(\{X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{F})\}^2) + \mathbb{E}(\{\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{g})\}^2).$$

QUESTÃO 1.9: Seja $\mathrm{Var}(X|\mathfrak{F}) = \mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{F})^2$. Mostre que

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|\mathfrak{F})) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})).$$

Resolução: Usando que $\mathrm{Var}(X|\mathfrak{F}) = \mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{F})^2$, temos por um lado que

$$\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|\mathfrak{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F})) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})^2) = (\text{prop. } 6) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})^2).$$

Por outro lado,

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})^2) - (\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})))^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Daí temos que

$$\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|\mathfrak{F})) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F})) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathrm{Var}(X).$$

QUESTÃO 1.10: Sejam $Y_1, Y_2, \ldots$ i.i.d. com média μ e variância σ^2, N um inteiro positivo independente das v.a's. com $\mathbb{E}(N^2) < \infty$ e $X = Y_1 + \ldots + Y_N$. Mostre que $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2\mathbb{E}(N) + \mu^2\mathrm{Var}(N)$.

Resolução: Para calcular a $\mathrm{Var}(X)$ vamos usar a questão anterior, onde encontramos que $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|\mathfrak{F})) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}))$. Considere então $\mathfrak{F} = \sigma(N)$ e note que $\mathbb{E}(X|\mathfrak{F}) = \mu N$, já que $\mu \cdot N \in \mathfrak{F}$ e para verificarmos que $\forall A \in \mathfrak{F}$ temos $\int_A \mathbb{E}(X|\mathfrak{F})d\mathbb{P} = \int_A \mu \cdot N d\mathbb{P}$ é suficiente mostrarmos a igualdade para $A = \{N = n\}$ qualquer que seja n inteiro positivo. Daí temos que,

$$\begin{aligned}
\int\limits_A \mathbb{E}(X|\mathfrak{F})d\mathbb{P} &= \int\limits_A X d\mathbb{P} = \mathbb{E}((Y_1 + \ldots + Y_n)\mathbb{I}_A) \\
&= \mathbb{E}(Y_1\mathbb{I}_A) + \ldots + \mathbb{E}(Y_n\mathbb{I}_A) \ \ \text{(como } N \text{ é independente das v.a's)} \\
&= \mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) + \ldots + \mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = n \cdot \mu \cdot \mathbb{P}(A) \\
&= \int\limits_A n \cdot \mu d\mathbb{P} = \int\limits_{\{N=n\}} N \cdot \mu d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|\mathfrak{F})) + \mathrm{Var}(N \cdot \mu) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|\mathfrak{F})) + \mu^2\mathrm{Var}(N)$. Agora resta saber quem é $\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|\mathfrak{F}))$. Ainda pelo exercício anterior temos que $\mathrm{Var}(X|\mathfrak{F}) = \mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{F})^2$, daí precisamos saber encontrar a esperança condicional $\mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F})$. Calculando (similarmente ao caso anterior)

$$\begin{aligned}
\int\limits_A \mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F})d\mathbb{P} &= \int\limits_A X^2 d\mathbb{P} = \mathbb{E}((Y_1 + \ldots + Y_n)^2\mathbb{I}_A) \ \ \text{(como os } Y_{i's} \text{ são i.i.d.)} \\
&= n\mathbb{E}(Y_1^2\mathbb{I}_A) + 2(n-1)\mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2)\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) + \ldots + 2\mathbb{E}(Y_1)\mathbb{E}(Y_2)\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) \\
&= n\mathbb{E}(Y_1^2)\mathbb{P}(A) + 2(n-1)\mu^2\mathbb{P}(A) + 2(n-2)\mu^2\mathbb{P}(A) + \ldots + 2\mu^2\mathbb{P}(A),
\end{aligned}$$

sabendo que $\sigma^2 = \text{Var}(Y_1) = \mathbb{E}(Y_1^2) - \mathbb{E}(Y_1)^2$ temos que $\mathbb{E}(Y_1^2) = \sigma^2 + \mu^2$. Deste modo

$$\begin{aligned}
\int\limits_A \mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F})d\mathbb{P} &= n\mathbb{E}(Y_1^2)\mathbb{P}(A) + 2(n-1)\mu^2\mathbb{P}(A) + 2(n-2)\mu^2\mathbb{P}(A) + \ldots + 2\mu^2\mathbb{P}(A) \\
&= n(\sigma^2+\mu^2)\mathbb{P}(A) + 2\mu^2\mathbb{P}(A)[(n-1)+(n-2)+\ldots+1] \\
&= n\sigma^2\mathbb{P}(A) + n\mu^2\mathbb{P}(A) + 2\mu^2\mathbb{P}(A)\frac{n(n-1)}{2} \\
&= n\sigma^2\mathbb{P}(A) + n^2\mu^2\mathbb{P}(A) = \int\limits_{\{N=n\}} (N\sigma^2 + N^2\mu^2)d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Claramente $(N\sigma^2 + N^2\mu^2) \in \mathfrak{F}$, logo $\mathbb{E}(X^2|\mathfrak{F}) = N\sigma^2 + N^2\mu^2$. Com isso, chegamos que $\text{Var}(X|\mathfrak{F}) = N\sigma^2 + N^2\mu^2 - N^2\mu^2 = N\sigma^2$ e portanto $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(\text{Var}(X|\mathfrak{F})) + \mu^2\text{Var}(N) = \sigma^2\mathbb{E}(N) + \mu^2\text{Var}(N)$.

QUESTÃO 1.11: Mostre que se X e Y são variáveis aleatórias com $X = \mathbb{E}(Y|\mathfrak{g})$ e $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) < \infty$ então $X = Y$ quase certamente.

Resolução: Como $X \in \mathfrak{g}$ e $X \in L^2(\mathfrak{g})$, pois $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ temos que $X \perp Y$. Assim, podemos escrever pelo teorema de Pitagoras, $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|\mathfrak{g}))^2$ como $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2)$ então $\mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|\mathfrak{g}))^2 = 0$, logo $Y = \mathbb{E}(Y|\mathfrak{g})$ quase certamente.

QUESTÃO 1.13: Suponha que X e Y tenha densidade conjunta $f(x,y) > 0$. Seja

$$\mu(y, A) = \int_A f(x,y)dx / \int f(x,y)dx.$$

Mostre que $\mu(Y(\omega), A)$ é probabilidade condicional regular para X dado $\sigma(Y)$.

Resolução: Observe primeiro que para todo $A \in \sigma(Y)$, $\omega \longmapsto \mu(Y(\omega), A)$ é uma versão da $\mathbb{P}(X \in A|Y)$, pois dado $A \in \sigma(Y)$, $\mu(Y(\omega), A) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A|Y)$.

De fato, $\int_A \mu(Y(\omega), A)d\mathbb{P} = \mathbb{E}(\mu(Y(\omega), A) \cdot \mathbb{I}_A)$ como X e Y tenha densidade conjunta

$f(x,y)$ então

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mu(Y(\omega),A)\cdot\mathbb{I}_A) &= \int_A\int_{\mathbb{R}}\mu(Y(\omega),A)f(x,Y(\omega))dxd\omega\\
&= \int_A \mu(Y(\omega),A)\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))dxd\omega \ \ \text{(subst. } \mu)\\
&= \int_A\int_A f(x,Y(\omega))dxd\omega\\
&= \int_A\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))\mathbb{I}_A dxd\omega = \int_A \mathbb{I}_A d\mathbb{P} = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A|Y) = \mathbb{P}(X\in A|Y).
\end{aligned}$$

Por fim, note que para todo $\omega\in\mathbb{R}$ q.c, $A\longmapsto\mu(Y(\omega),A)$ é uma probabilidade, já que $\mu(Y(\omega),\Omega)=1$ e $\mu(Y(\omega),\varnothing)=0$, além disso dados $A_1,A_2,\ldots\in\sigma(Y)$ disjuntos dois à dois, note que

$$\begin{aligned}
\mu(Y(\omega),\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i) &= \frac{1}{\int f(x,Y(\omega))dx}\cdot\left(\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i} f(x,Y(\omega))dx\right)\\
&= \frac{1}{\int f(x,Y(\omega))dx}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))\cdot\mathbb{I}_{\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i}dx\right) \ \ \text{(como os } A_{i's} \text{ são disjuntos)}\\
&= \frac{1}{\int f(x,Y(\omega))dx}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{\infty} f(x,Y(\omega))\cdot\mathbb{I}_{A_i}dx\right)\\
&= \text{(Pelo T.C.M. tomando } \sum_{i=1}^{k} f(x,Y(\omega))\cdot\mathbb{I}_{A_i}\nearrow\sum_{i=1}^{\infty} f(x,Y(\omega))\cdot\mathbb{I}_{A_i})\\
&= \frac{1}{\int f(x,Y(\omega))dx}\cdot\lim_{k\longrightarrow+\infty}\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{k} f(x,Y(\omega))\cdot\mathbb{I}_{A_i}dx \ \ \text{(usando linearidade)}\\
&= \frac{1}{\int f(x,Y(\omega))dx}\cdot\lim_{k\longrightarrow+\infty}\sum_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))\cdot\mathbb{I}_{A_i}dx\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\int f(x,Y(\omega))dx}\cdot\int_{\mathbb{R}} f(x,Y(\omega))\cdot\mathbb{I}_{A_i}dx\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\int f(x,Y(\omega))dx}\cdot\int_{A_i} f(x,Y(\omega))dx = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(Y(\omega),A_i).
\end{aligned}$$

QUESTÃO 1.14: Seja $\mu(\omega,A)$ uma probabilidade condicional regular para X dado $\mathfrak{F}$, e seja $f:(S,\mathfrak{S})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathfrak{R})$ com $\mathbb{E}(|f(X)|)<\infty$. Começe com as funções simples e mostre que

$$\mathbb{E}(f(X)|\mathfrak{F}) = \int\mu(\omega,dx)f(x) \ \ q.c.$$

Resolução: Considere inicialmente $f(x) = \mathbb{I}_A(x)$ para $A \in \mathfrak{S}$ e observe que por definição $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A(X)|\mathfrak{F}) = \mathbb{P}(X \in A|\mathfrak{F}) = \mu(\omega, A) = \int_A \mu(\omega, dx) = \int \mu(\omega, dx)\mathbb{I}_A$. Assim considerando agora as funções simples, $f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathbb{I}_{A_n}$, e tomando $f_k = \sum_{n=1}^{k} a_n \mathbb{I}_{A_n}$ temos que $f_k \leq f_{k+1}$ e $f_k \nearrow f$ e pelo T.C.M. juntamente com a linearidade obtemos

$$\begin{aligned}
\int \mu(\omega, dx) f(x) &= \lim_{k \longrightarrow +\infty} \int \mu(\omega, dx) \sum_{n=1}^{k} a_n \mathbb{I}_{A_n} = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{k} \int \mu(\omega, dx) a_n \mathbb{I}_{A_n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int \mu(\omega, dx) a_n \mathbb{I}_{A_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(a_n \mathbb{I}_{A_n}|\mathfrak{F}) = \mathbb{E}(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \mathbb{I}_{A_n}|\mathfrak{F}).
\end{aligned}$$

Usamos agora o fato de que toda função mensurável pode ser aproximada por funções simples e que toda função pode ser decomposta em soma de funções simples ($f = f^+ - f^-$), e já vimos que para funções simples o resultado é verdadeiro concluímos então que vale para toda f mensurável.

QUESTÃO 1.15: Use a probabilidade condicional regular para mostrar a desigualdade de *Hölder* condicional, ou seja, $\mathbb{E}(|XY||\mathfrak{g}) \leq \mathbb{E}(|X|^p|\mathfrak{g})^{1/p} \cdot \mathbb{E}(|Y|^q|\mathfrak{g})^{1/q}$, onde $1/p + 1/q = 1$.

Resolução: Seja $\mu(w, A)$ a distribuição condicional regular de (X, Y), ou seja, $\mathbb{P}((x, y) \in A|\mathfrak{g})(w) = \mu(w, A)$ (como é probabilidade podemos passar a esperança).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|XY||\mathfrak{g})(w) &= \text{(pelo ex. 1.14)} = \int |XY| \mu(w, dx\,dy) \;\; \text{(pela desigualdade de } \textit{Hölder}\text{)} \\
&\leq \left(\int |X|^p \mu(w, dx\,dy) \right)^{1/p} \cdot \left(\int |Y|^q \mu(w, dx\,dy) \right)^{1/q} \\
&= \mathbb{E}(|X|^p|\mathfrak{g})^{1/p} \cdot \mathbb{E}(|Y|^q|\mathfrak{g})^{1/q}
\end{aligned}$$

QUESTÃO 2.1: Suponha X_n é martingal em relação a $\mathfrak{g}_n$ e seja $\mathfrak{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Então $\mathfrak{F}_n \subset \mathfrak{g}_n$ e X_n é martingal em relação a $\mathfrak{F}_n$.

Resolução: Como cada $X_n \in \mathfrak{g}_n$ e $\mathfrak{g}_n$ é uma filtração então $\mathfrak{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n) \subset \mathfrak{g}_n$. Além disso, por definição $X_n \in \mathfrak{F}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como X_n é martingal em relação a $\mathfrak{g}_n$ então

$\mathbb{E}|X_n| < \infty$. Por fim note que $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathfrak{g}_n)|\mathfrak{F}_n)$ pois $\mathfrak{F}_n \subset \mathfrak{g}_n$ usando que X_n é martingal em relação a $\mathfrak{g}_n$ temos que

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathfrak{g}_n)|\mathfrak{F}_n) = \mathbb{E}(X_n|\mathfrak{F}_n) = X_n.$$

Portanto X_n é martingal em relação a $\mathfrak{F}_n$.

QUESTÃO 2.2: Suponha f superharmônica em $\mathbb{R}^d$. Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ i.i.d. uniforme em $B(0,1)$ e defina $S_n = S_{n-1} + \xi_n$ para $n \geq 1$ e $S_0 = x$. Mostre que $X_n = f(S_n)$ é supermartingal.

Resolução: Como f é contínua e para qualquer $x \in \mathbb{R}^d$ e $r < \infty$, $B(x,r)$ é limitado, logo $\mathbb{E}(|f(S_n)|) < \infty$. Além disso, temos por definição que S_n é adaptada a $\mathfrak{F}_n$, e como f é contínua temos que $f(S_n)$ é ainda mensurável em $\mathfrak{F}_n$, logo $f(S_n)$ é adaptada a $\mathfrak{F}_n$. Resta portanto verificar que $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathfrak{F}_n) \leq X_n$.

Sabemos que $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = \mathbb{E}(f(S_{n+1})|\mathfrak{F}_n) = \mathbb{E}(f(S_n + \xi_{n+1})|\mathfrak{F}_n)$. Como os $\xi_{n's}$ são i.i.d. e têm distribuição uniforme em $B(0,1)$ temos que a função densidade $f_{S_n+\xi_{n+1}}(x) = 1$ se $x \in B(S_n, 1)$ e 0 caso contrário.

Usando agora o exemplo visto em sala, que diz que se X e Y tem densidade comum $f(x,y)$ e temos $\mathbb{E}(|g(X)|) < \infty$ então $\mathbb{E}(g(X)|Y) = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x,y)dx / \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx$.

Assim, considerando $X = S_n + \xi_{n+1}$, $Y = S_n$ e $g = f$ temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)|Y) &= \mathbb{E}(f(S_n + \xi_{n+1})|\mathfrak{F}_n) = \left(\frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(S_n,1)} f(y)dy\right) / \left(\frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(S_n,1)} dy\right) \\
&= \frac{1}{|B(0,1)|}\int_{B(S_n,1)} f(y)dy \leq f(S_n) \quad \text{(pois } f \text{ é superharmônica.)}
\end{aligned}$$

QUESTÃO 2.3: Dar um exemplo de um submartingal X_n tal que X_n^2 é um supermartingal. Dica: X_n não tem que ser aleatória.

Resolução: Considere $X_n = -\frac{1}{n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$. Note que X_n é crescente, pois $X_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \geq -\frac{1}{n+1} = X_n$. Além disso, X_n é submartingal em $\mathfrak{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, já que, $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = X_{n+1} \geq X_n$.

Mas tomando X_n^2 ficamos com $\mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathfrak{F}_n) = X_{n+1}^2 = \frac{1}{(n+2)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} = X_n^2$. Logo X_n^2 é supermartingal.

QUESTÃO 2.4: Dê exemplo de um martingal com X_n com $X_n \longrightarrow -\infty$ q.c. Dica: seja $X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, onde os ξ_i são independentes (mas não identicamente distribuídas) com $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$.

Resolução: Sejam $\xi_1, \xi_2, \ldots$ v.a's independentes, tais que $\mathbb{P}(\xi_n = -1) = 1 - 2^{-n}$ e $\mathbb{P}(\xi_n = 2^n - 1) = 2^{-n}$. Considere $\mathfrak{F}_n = \sigma(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ e $X_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Note que X_n é martingal com respeito a $\sigma-$álgebra $\mathfrak{F}_n$, já que por definição $X_n \in \mathfrak{F}_n$, além disso para qualquer $n \geq 1$, $\mathbb{E}(|\xi_n|) \leq \mathbb{E}(2^n - 1) < \infty$. Usando agora a o fato de $X_n \in \mathfrak{F}_n$, ξ_{n+1} ser independente de $\mathfrak{F}_n$ e a linearidade da esperança condicional temos,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = \mathbb{E}(X_n + \xi_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = \mathbb{E}(X_n|\mathfrak{F}_n) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = X_n + \mathbb{E}(\xi_{n+1}),$$

mas $\mathbb{E}(\xi_n) = (-1)(1 - 2^{-n}) + (2^{-n} - 1)2^{-n} = 0$ para todo $n \geq 1$, assim temos que $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = X_n$ e portanto X_n é martingal.

Observe também que como $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\xi_n = 2^n - 1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} < \infty$ temos pelo Lema de Borel-Cantelli que $\mathbb{P}(\xi_n = 2^n - 1 \text{inf. vezes}) = 0$, logo $\mathbb{P}(\xi_n = -1 \text{inf. vezes}) = 1$ e portanto $X_n \longrightarrow -\infty$ q.c.

QUESTÃO 2.5: Seja $X_n = \sum\limits_{m \leq n} \mathbb{I}_{B_m}$ e suponha $B_m \in \mathfrak{F}_m$. Qual é a decomposição de Doob para X_n?

Resolução: Vimos na demonstração do Teorema de Doob que $X_n = M_n + A_n$ onde M_n é um martingal e A_n é um predizível, tal que $A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}(X_n|\mathfrak{F}_{n-1}) - X_{n-1}$ e $A_0 = 0$. Desta forma temos,

$$\begin{aligned} A_1 &= A_1 - A_0 = \mathbb{E}(X_1|\mathfrak{F}_0) - X_0 = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{B_0} + \mathbb{I}_{B_1}|\mathfrak{F}_0) - \mathbb{I}_{B_0} \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{B_0}|\mathfrak{F}_0) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{B_1}|\mathfrak{F}_0) - \mathbb{I}_{B_0} \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{B_1}|\mathfrak{F}_0) = \mathbb{P}(\mathbb{I}_{B_1}|\mathfrak{F}_0) \end{aligned}$$

para $n = 2$ ficamos com,

$$\begin{aligned} A_2 - A_1 &= \mathbb{E}(X_2|\mathfrak{F}_1) - X_1 = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{B_0} + \mathbb{I}_{B_1} + \mathbb{I}_{B_2}|\mathfrak{F}_1) - (\mathbb{I}_{B_0} + \mathbb{I}_{B_1}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{B_0}|\mathfrak{F}_1) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{B_1}|\mathfrak{F}_1) + \mathbb{E}(\mathbb{I}_{B_2}|\mathfrak{F}_1) - (\mathbb{I}_{B_0} + \mathbb{I}_{B_1}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{B_2}|\mathfrak{F}_1) = \mathbb{P}(\mathbb{I}_{B_2}|\mathfrak{F}_1) \end{aligned}$$

Logo, $A_2 = \mathbb{P}(\mathbb{I}_{B_2}|\mathfrak{F}_1) + A_1 = \mathbb{P}(\mathbb{I}_{B_2}|\mathfrak{F}_1) + \mathbb{P}(\mathbb{I}_{B_1}|\mathfrak{F}_0)$. Procedendo desta forma chegaremos que $A_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{I}_{B_m}|\mathfrak{F}_{m-1})$. Daí, temos que $M_n = X_n - A_n = \sum\limits_{m\leq n} \mathbb{I}_{B_m} - \sum\limits_{m=1}^{n} \mathbb{P}(\mathbb{I}_{B_m}|\mathfrak{F}_{m-1})$.

QUESTÃO 2.6: Seja $\xi_1, \xi_2, \ldots$ independentes com $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ e $\mathrm{Var}(\xi_m) = \sigma_m^2 < \infty$, e seja $s_n^2 = \sum\limits_{m=1}^{n} \sigma_m^2$. Então $S_n^2 - s_n^2$ é martingal.

Resolução: Observe inicialmente que $\mathbb{E}(|S_n^2 - s_n^2|) \leq \mathbb{E}(|S_n^2|) + \mathbb{E}(|s_n^2|)$, como $\mathbb{E}(|s_n^2|) < \infty$ basta observar $\mathbb{E}(|S_n^2|) = \mathbb{E}((\xi_1 + \ldots, \xi_n)^2)$ efetuando o calculo de $(\xi_1 + \ldots, \xi_n)^2$ e passando a esperança observando que os $\xi_1, \xi_2, \ldots$ são independentes e $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$, ficamos com $\mathbb{E}(|S_n^2|) = \mathbb{E}((\xi_1 + \ldots, \xi_n)^2) = \mathbb{E}(\xi_1^2) + \ldots + \mathbb{E}(\xi_n^2) + \ldots, \mathbb{E}((\xi_n)^2)$.

Como $\sigma_m^2 = Var(\xi_m) = \mathbb{E}(\xi_m^2) - \mathbb{E}(\xi_m)^2 = \mathbb{E}(\xi_m^2)$, então $\mathbb{E}(|S_n^2|) = \sum\limits_{m=1}^{n} \sigma_m^2 < \infty$. Portanto $\mathbb{E}(|S_n^2 - s_n^2|) < \infty$.

Note também que como s_n^2 é constante para cada n, temos pela definição de $\mathfrak{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ que $S_n^2 - s_n^2 \in \mathfrak{F}_n$ para todo n.

Ademais, note que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{n+1}^2 - s_{n+1}^2|\mathfrak{F}_n) &= \mathbb{E}(S_{n+1}^2|\mathfrak{F}_n) - \mathbb{E}(s_{n+1}^2|\mathfrak{F}_n) \\ &= \mathbb{E}((S_n + \xi_{n+1})^2|\mathfrak{F}_n) - \mathbb{E}(s_{n+1}^2|\mathfrak{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(S_n^2|\mathfrak{F}_n) + 2\mathbb{E}(S_n\xi_{n+1}|\mathfrak{F}_n) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2|\mathfrak{F}_n) - s_{n+1}^2 \\ &= S_n^2 + 2\mathbb{E}(S_n\xi_{n+1}|\mathfrak{F}_n) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2|\mathfrak{F}_n) - s_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Como ξ_{n+1}^2 é independente de $\mathfrak{F}_n$ temos que $\mathbb{E}(\xi_{n+1}^2|\mathfrak{F}_n) = \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2) = \sigma_{n+1}^2$. Além disso, usando que $S_n \in \mathfrak{F}_n$, $\mathbb{E}(\xi_{n+1}) = 0 < \infty$ e $\mathbb{E}(S_n\xi_{n+1}) = \mathbb{E}(S_n) \cdot \mathbb{E}(\xi_{n+1}) = 0 < \infty$ temos por proposição visto em sala que $\mathbb{E}(S_n\xi_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = S_n\mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = S_n\mathbb{E}(\xi_{n+1}) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{n+1}^2 - s_{n+1}^2|\mathfrak{F}_n) &= S_n^2 + 2\mathbb{E}(S_n\xi_{n+1}|\mathfrak{F}_n) + \mathbb{E}(\xi_{n+1}^2|\mathfrak{F}_n) - s_{n+1}^2 \\ &= S_n^2 + \sigma_{n+1}^2 - s_{n+1}^2 = S_n^2 - s_n^2.\end{aligned}$$

O que mostra que $S_n^2 - s_n^2$ é martingal.

QUESTÃO 2.7: Se $\xi_1, \xi_2, \ldots$ são independentes e temos $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ então

$$X_n^{(k)} = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} \xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}$$

é um martingal. Quando $k = 2$ e $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $2X_n^{(2)} = S_n^2 - \sum\limits_{m\le n}\xi_m^2$.

Resolução: Note que $\mathbb{E}(|X_n^{(k)}|) \le \mathbb{E}(|\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}|)$ usando a desigualdade triangular, a linearidade da esperança e o fato das $\xi_{i's}$ serem independentes obtemos

$$\mathbb{E}\left(|\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}|\right) \le \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\mathbb{E}(|\xi_{i_1}|)\cdots\mathbb{E}(|\xi_{i_k}|) < \infty.$$

Por definição $X_n^{(k)}$ é adaptada à $\mathfrak{F}_n$. E mais, como $\mathbb{E}(X_{n+1}^{(k)}|\mathfrak{F}_n) = \mathbb{E}\left(\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n+1}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}|\mathfrak{F}_n\right)$ só teremos problemas quanto a mensurabilidade das funções $\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}$ com respeito a $\sigma-$algebra $\mathfrak{F}_n$ quando $\xi_{i_k} = \xi_{n+1}$. Mas usando proposição visto em sala $(\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_{k-1}\le n}(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}) \in \mathfrak{F}_n$, $\mathbb{E}(\xi_{n+1}) = 0 < \infty$ e $\mathbb{E}(\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_{k-1}\le n}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k-1}\cdot\xi_{n+1}) = 0)$ podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k-1}\le n}\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k-1}\cdot\xi_{n+1}|\mathfrak{F}_n) &= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_{k-1}\le n}(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k-1})\cdot\mathbb{E}(\xi_{n+1}|\mathfrak{F}_n) \\ &= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n+1}(\xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k-1})\cdot\mathbb{E}(\xi_{n+1}) = 0.\end{aligned}$$

Deste modo temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}^{(k)}) &= \mathbb{E}\left(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n+1} \xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}|\mathfrak{F}_n\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k}|\mathfrak{F}_n\right)\\
&= \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \xi_{i_1}\cdots\xi_{i_k} = X_n^{(k)}.
\end{aligned}$$

O que mostra que $X_n^{(k)}$ é martingal.

QUESTÃO 2.8: Generalize (i) do Teorema 5.2.4 mostrando que se X_n e Y_n são submartingais com respeito a $\mathfrak{F}_n$, então $X_n \vee Y_n$ também é.

Resolução: Como X_n e Y_n são adaptados a $\mathfrak{F}_n$ então $X_n \vee Y_n$ também é adaptados a $\mathfrak{F}_n$. Além disso, sabemos que $|X_n \vee Y_n| \leq |X_n| + |Y_n|$, logo $\mathbb{E}(|X_n \vee Y_n|) \leq \mathbb{E}(|X_n|) + \mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$, já que X_n e Y_n são submartingais.

Por fim, usando a monotonicidade da esperança condicional e o fato de X_n e Y_n serem submartingais, podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1} \vee Y_{n+1}|\mathfrak{F}_n) &\geq \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = X_n\\
\mathbb{E}(X_{n+1} \vee Y_{n+1}|\mathfrak{F}_n) &\geq \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = Y_n
\end{aligned}$$

donde concluímos que $\mathbb{E}(X_{n+1} \vee Y_{n+1}|\mathfrak{F}_n) \geq X_n \vee Y_n$, e portanto $X_n \vee Y_n$ é submartingal.

QUESTÃO 2.9: Sejam $Y_1, Y_2, \ldots$ variáveis aleatórias não negativa i.i.d. com $\mathbb{E}(Y_m) = 1$ e $\mathbb{P}(Y_m = 1) < 1$.

(i) Mostre que $X_n = \prod_{m\leq n} Y_m$ define um martingal.

(ii) Use o Teorema 5.2.9 e um argumento de contradição para mostrar que $X_n \longrightarrow 0$ quase certamente.

(iii) Use a lei forte dos grandes números para concluir $(1/n)\log X_n \longrightarrow c < 0$.

Resolução:

(i) Por definição $X_n \in \mathfrak{F}_n$, e como $|X_n| = |\prod_{m\leq n} Y_m| = \prod_{m\leq n} Y_m$, pois os $Y_{n's}$ são não negativos, temos passando a esperança e observando que os $Y_{n's}$ são i.i.d. que $\mathbb{E}(|X_n|) = \prod_{m\leq n} \mathbb{E}(Y_m) = 1 < \infty$.

Além disso temos que $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = \mathbb{E}(X_n \cdot Y_{n+1}|\mathfrak{F}_n)$, como $X_n \in \mathfrak{F}_n$, $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = 1$ e $\mathbb{E}(X_n \cdot Y_{n+1}) = 1$ temos por proposição vista em sala que $\mathbb{E}(X_n \cdot Y_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = X_n\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathfrak{F}_n)$ como Y_{n+1} é independente de $\mathfrak{F}_n$ podemos ainda escrever

$$\mathbb{E}(X_n \cdot Y_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = X_n\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathfrak{F}_n) = X_n\mathbb{E}(Y_{n+1}) = X_n.$$

Donde concluímos (i).

(ii) Pelo Teorema 5.2.9 temos que $X_n \longrightarrow X_\infty$ q.c.. Como $\mathbb{P}(Y_m = 1) < 1$ podemos considerar $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{P}(|Y_m - 1| \geq \varepsilon) > 0$. Tomemos agora $\delta > 0$ e observe que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| \geq \delta\varepsilon) &= \mathbb{P}(|X_n(Y_{n+1} - 1)| \geq \delta\varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \cdot |Y_{n+1} - 1| \geq \delta\varepsilon) \\ &\geq \mathbb{P}(|X_n| \geq \delta, |Y_{n+1} - 1| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| \geq \delta)\mathbb{P}(|Y_{n+1} - 1| \geq \varepsilon). \end{aligned}$$

Como $X_n \longrightarrow X_\infty$ q.c. então X_n converge em probabilidade, ou seja, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| \geq \delta\varepsilon) = 0$ o que implica pela desigualdade acima que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \delta) = 0$, como $X_n \geq 0$ temos que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \mathbb{P}(X_n \geq \delta) = 0$, como o limite é único, concluímos que $\mathbb{P}(X_n \longrightarrow 0) = 1$, ou seja, $X_n \longrightarrow 0$ q.c.

(iii) Seja $\delta > 0$ e defina $Z_m = Y_m \vee \delta > 0$, note que Z_m é i.i.d., pois os $Y_{m's}$ o são. Seja $\varphi(x) = \log(x)$, assim $\varphi(Z_m)$ está bem definida e como φ é côncavo, $\mathbb{E}(\log(Y_m \vee \delta)) < \infty$ (pois, caso $\mathbb{E}(\log(Y_m \vee \delta)) \leq \mathbb{E}(Y_m \vee \delta) < \infty$) temos pela desigualdade de Jensen que

$$\mathbb{E}(\log(Y_m \vee \delta)) \leq \log(\mathbb{E}(Y_m \vee \delta))$$

fazendo $\delta \longrightarrow 0$, usando o fato de φ ser côncavo estrito e $\mathbb{P}(Y_m = 1) < 1$ temos que $\mathbb{E}(\log(Y_m)) < \log(\mathbb{E}(Y_m)) = \log(1) = 0$. Assim temos que $\mathbb{E}(\log(Y_m)) \in [-\infty, 0)$.

Aplicando a lei Forte dos Grandes números as v.a's i.i.d $\log(Y_m)$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\log(Y_1)+\log(Y_2)+\ldots+\log(Y_n)}{n} &\longrightarrow \mathbb{E}(\log(Y_1)) \;\; q.c\\ \frac{\log(X_n)}{n} &\longrightarrow \mathbb{E}(\log(Y_1))<0 \;\; q.c.\end{aligned}$$

QUESTÃO 2.10: Suponha $y_n > -1$ para todo n e $\sum |y_n| < \infty$. Mostre que $\prod_{m=1}^{\infty}(1+y_n)$ existe.

Resolução: Antes de provar que $\prod_{m=1}^{\infty}(1+y_n)$ existe, vamos mostrar uma desigualdade que vai nos auxiliar no exercício.
Afirmação: Se $|y| \leq 1/2$ então $y - y^2 \leq \log(1+y) \leq y$.

De fato, a segunda parte é bem simples e já usamos no exercício anterior, como $1+y \leq e^y$ para todo y, em particular para $|y| \leq 1/2$ e log é uma função crescente e bem definida neste caso para os valores $|y| \leq 1/2$ temos aplicando log de ambos os lados que $\log(1+y) < y$.

Para a primeira parte, escreva $\log(1+y)$ em séries de potências $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \ldots$ e para $|y| \leq 1/2$ temos

$$\begin{aligned}\left|-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\ldots\right| &\leq |-\frac{y^2}{2}|+|\frac{y^3}{3}|+|\frac{y^4}{4}|\ldots\\ &\leq \frac{y^2}{2}+\frac{y^2|y|}{3}+\frac{y^2|y^2|}{4}\ldots\\ &= \frac{y^2}{2}(1+\frac{2|y|}{3}+\frac{2y^2}{4}+\ldots)\\ &\leq \frac{y^2}{2}(1+|y|+y^2+|y^3|+\ldots)\\ &\leq \frac{y^2}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)=y^2.\end{aligned}$$

Portanto $y - y^2 \leq y - (y^2/2 + y^3/3 - \ldots) = \log(1+y)$.

Voltando a questão, temos que $\sum |y_n| < \infty$ então para $n \geq n_0 \geq 0$ temos que $|y_n| \leq 1/2$ o que nos permite garantir também que $\sum y_n^2 < \infty$ e que para $N \geq n_0$ temos

$$\sum_{n=N}^{\infty} y_n - y_n^2 \leq \sum_{n=N}^{\infty}\log(1+y_n) \leq \sum_{n=N}^{\infty} y_n$$

A última desigualdade mostra que $\log(\prod_{n=N}^{\infty}(1+y_n)) = \sum_{n=N}^{\infty}\log(1+y_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ e portanto $\prod_{m=1}^{\infty}(1+y_n)$ existe.

QUESTÃO 2.12: Use as variáveis aleatórios da questão 2.2 para concluir que, em $d \leq 2$, as funções superharmônicas não negativas deve ser constante. O exemplo $f(x) = |x|^{2-d}$ mostra isto é falso em $d > 2$.

Resolução: Seja f função superharmônica não negativa em $\mathbb{R}^d$, considere como na questão 2.2 $\xi_1, \xi_2, \ldots$ i.i.d. uniforme em $B(0,1)$, com $S_n = S_{n-1} + \xi_n$ para $n \geq 1$ e $S_0 = x$. Assim pela questão 2.2 $X_n = f(S_n)$ é supermartingal é como f é não negativa temos $X_n \geq 0$ para todo $n \geq 0$.

Por Corolário visto em sala, se $X_n \geq 0$ é supermartingal então $X_n \longrightarrow X$ q.c. Supondo que f é não constante então existe $a < b$ de modo que $A = \{f < a\}$ e $B = \{f > b\}$ são conjuntos abertos e não vazio (pois f é contínua).

Considere o caso $d = 1$, como $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$ e $\mathrm{Var}(\xi_i) < \infty$ temos pela Lei Fraca dos Grandes Números que $\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n} = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ tomando $S_0 = 0$, assim pelo Teorema $Chung - Fuchs$ (ou Teorena 4.2.7), S_n é recorrente (como todos os pontos são acessíveis, mas então

$$\liminf f(S_n) \leq a < b \leq \limsup f(S_n).$$

Absurdo, pois sabemos que $f(S_n) \longrightarrow X$ q.c.

Para o caso $d = 2$, usamos o Teorema 4.2.8 que vai nos garantir que S_n também é recorrente e por argumento análogo, concluímos que f não pode ser constante.

QUESTÃO 2.13: O princípio de comutação. Suponha X_n^1 e X_n^2 supermartingais com respeito a $\mathfrak{F}_n$, e N é um tempo de parada de modo a que $X_N^1 \geq X_N^2$. Então

$$Y_n = X_n^1 \mathbb{I}_{(N>n)} + X_n^2 \mathbb{I}_{(N\leq n)} \quad \text{é um supermartingal}$$

$$Z_n = X_n^1 \mathbb{I}_{(N\geq n)} + X_n^2 \mathbb{I}_{(N<n)} \quad \text{é um supermartingal.}$$

Resolução: Por definição temos que $Y_n, Z_n \in \mathfrak{F}_n$ e $\mathbb{E}(|Y_n|), \mathbb{E}(|Z_n|) \leq \mathbb{E}(|X_n^1|) + \mathbb{E}(|X_n^2|) <$

∞. Usando agora a definição de Y_n temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathfrak{F}_n) &= \mathbb{E}(X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N>n+1)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N\leq n+1)}|\mathfrak{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N>n+1)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N\leq n)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N=n+1)}|\mathfrak{F}_n) \ \ (\text{como } X^1_N \geq X^2_N) \\
&\leq \mathbb{E}(X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N>n+1)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N\leq n)} + X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N=n+1)}|\mathfrak{F}_n) \\
&\leq \mathbb{E}(X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N\geq n+1)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N\leq n)}|\mathfrak{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N>n)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N\leq n)}|\mathfrak{F}_n)
\end{aligned}$$

usando agora que N é tempo de parada, logo $(N > n), (N \leq n) \in \mathfrak{F}_n$ e novamente por proposição visto em sala podemos reescrever

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathfrak{F}_n) \leq \mathbb{E}(X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N>n)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N\leq n)}|\mathfrak{F}_n) &= \mathbb{I}_{(N>n)}\mathbb{E}(X^1_{n+1}|\mathfrak{F}_n) + \mathbb{I}_{(N\leq n)}\mathbb{E}(X^2_{n+1}|\mathfrak{F}_n) \\
&\leq \mathbb{I}_{(N>n)}X^1_n + \mathbb{I}_{(N\leq n)}X^2_n = Y_n
\end{aligned}$$

para Z_n a conta é análoga.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathfrak{F}_n) &= \mathbb{E}(X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N\geq n+1)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N<n+1)}|\mathfrak{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N>n)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N\leq n)}|\mathfrak{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N>n)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N<n)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N=n)}|\mathfrak{F}_n) \\
&\leq \mathbb{E}(X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N>n)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N<n)} + X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N=n)}|\mathfrak{F}_n) \\
&\leq \mathbb{E}(X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N\geq n)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N<n)}|\mathfrak{F}_n)
\end{aligned}$$

usando agora que N é tempo de parada, logo $(N > n), (N \leq n) \in \mathfrak{F}_n$ e novamente por proposição visto em sala podemos reecrever

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathfrak{F}_n) &= \mathbb{E}(X^1_{n+1}\mathbb{I}_{(N\geq n)} + X^2_{n+1}\mathbb{I}_{(N<n)}|\mathfrak{F}_n) \\
&= \mathbb{I}_{(N\geq n)}\mathbb{E}(X^1_{n+1}|\mathfrak{F}_n) + \mathbb{I}_{(N<n)}\mathbb{E}(X^2_{n+1}|\mathfrak{F}_n) \\
&= \mathbb{I}_{(N\geq n)}X^1_n + \mathbb{I}_{(N<n)}X^2_n = Z_n
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Lista IV - (Data 19/05/14)

QUESTÃO 3.1: Seja X_n, $n \geq 0$, um submartingal com $\sup X_n < \infty$. Seja $\xi_n = X_n - X_{n-1}$ e suponha $\mathbb{E}(\sup \xi_n^+) < \infty$. Mostre que X_n converge quase certamente.

Resolução: Seja $N = \inf\{n;\ X_n > M\}$. Como N é tempo de parada e X_n é submartingal então (por proposição feita na aula do dia 25/04/14) $X_{N\wedge n}$ é submartingal. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \sup_n \xi_n^+ &\geq \xi_{N\wedge n}^+ = (X_{N\wedge n} - X_{N\wedge n-1})^+ \geq (X_{N\wedge n} - M)^+ \geq X_{N\wedge n}^+ - M \\ &\Longrightarrow X_{N\wedge n}^+ \leq M + \sup_n \xi_n^+. \end{aligned}$$

Assim, passando a esperança em ambos os lados da desigualdade e tomando o $\sup_n$ obtemos que

$$\sup_n \mathbb{E}(X_{N\wedge n}^+) \leq M + \sup_n(\underbrace{\mathbb{E}(\sup_n \xi_n^+)}_{<\infty}) = M + \mathbb{E}(\sup_n \xi_n^+) < \infty.$$

Pelo Teorema da convergência de martingais $X_{N\wedge n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$ quase certamente, $\mathbb{E}|X| < \infty$ (em $\Omega = [N < \infty] \cup [N = +\infty]$), assim em $[N = +\infty]$, $\lim X_{N\wedge n} = \lim X_n$ converge q.c.

QUESTÃO 3.5: Seja $p_m \in [0, 1)$. Use os lemas de Borel-Cantelli para mostrar que

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1 - p_m) = 0 \ \text{ se, e somente se, } \ \sum_{m=1}^{\infty} p_m = \infty.$$

Resolução: Considere $X_m \in \{0, 1\}$ variáveis aleatórias independentes com $\mathbb{P}(X_m = 1) = p_m$. Daí temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_m = 0,\ \forall m \geq 1) &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots) \ \text{ (pela independência)} \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 0) \cdot \ldots \\ &= \prod_{m=1}^{\infty}(1 - p_m) \ \text{ (pois, } \mathbb{P}(X_m = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_m = 1) = 1 - p_m) \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Se $\sum_{m=1}^{\infty} p_m = \infty$ temos pelo Lema de Borel-Cantelli que $\mathbb{P}(X_m = 1,\ \text{inf. vezes}) = 1$, ou seja $\prod_{m=1}^{\infty}(1-p_m) = \mathbb{P}(X_m = 0,\ \forall m \geq 1) = 0$.

$(\Longrightarrow)$ Vamos argumentar por contrapositiva, se $\sum_{m=1}^{\infty} p_m < \infty$ então para M suficientemente grande temos que $\sum_{m=M}^{\infty} p_m < 1$, como os $p_m \geq 0$ temos $\mathbb{P}(X_m = 0,\ \forall m \geq M) = \prod_{m=M}^{\infty}(1 - p_m) > 0$ e como $p_m < 1$ para todo m concluímos que $\prod_{m=1}^{\infty}(1-p_m) = \mathbb{P}(X_m = 0,\ \forall m \geq 1) > 0$.

QUESTÃO 3.6: Mostre que $\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}(A_n | \bigcap_{m=1}^{n-1} A_m^c) = \infty$ implica $\mathbb{P}(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m^c) = 0$.

Resolução: Considere para $n \geq 2$, $p_n = \mathbb{P}(A_n | \bigcap_{m=1}^{n-1} A_m^c)$ e para $n = 1$ defina $p_1 = \mathbb{P}(A_1)$. Assim, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} p_m = p_1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_m = \infty$ e pelo exercício anterior $\prod_{m=1}^{\infty}(1-p_m) = 0$.

No entanto, observe que $\prod_{m=1}^{n}(1-p_m) = \mathbb{P}(\bigcap_{m=1}^{n} A_m^c)$, pois $n = 1$ temos que o resultado é válido, já que $1 - p_1 = \mathbb{P}(A_1^c)$, suponha agora válido para n e verifiquemos se vale para $n+1$, como

$$
\begin{aligned}
\prod_{m=1}^{n+1}(1-p_m) &= (1-p_{n+1}) \cdot \prod_{m=1}^{n}(1-p_m) = \mathbb{P}\left(A_{n+1}^c | \bigcap_{m=1}^{n-1} A_m^c\right) \cdot \prod_{m=1}^{n}(1-p_m) \\
&= \mathbb{P}\left(A_{n+1}^c | \bigcap_{m=1}^{n} A_m^c\right) \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{n} A_m^c\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(A_{n+1}^c \cap \bigcap_{m=1}^{n} A_m^c\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{n} A_m^c\right)} \cdot \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{n} A_m^c\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{n+1} A_m^c\right).
\end{aligned}
$$

Assim, fazendo $n \longrightarrow +\infty$ obtemos que

$$
\mathbb{P}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m^c\right) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \prod_{m=1}^{n+1}(1-p_m) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-p_m) = 0.
$$

QUESTÃO 4.2: Generalize a prova do Teorema 5.4.1 e mostre que se X_n é um submartingal e $M \leq N$ são tempos de parada com $\mathbb{P}(N \leq k) = 1$ então $\mathbb{E}(X_M) \leq \mathbb{E}(X_N)$.

Resolução: Seja $k_n = \mathbb{I}_{[M<n\leq N]}$. Observe que $[M < n \leq N] = [M \leq n-1] \cap [N < n]^c \in \mathfrak{F}_{n-1}$ pois M, N são tempos de parada, assim, k_n é predizível.

Denote $Y_n = (k \cdot X)_n$, como X_n é um submartingal e k_n é predizível concluímos (por Proposição da aula do dia 25/04/14) que Y_n é submartingal. Além disso, observe que $Y_n = (k \cdot X)_n = \sum_{m=1}^{n} k_m(X_m - X_{m-1}) = X_{N\wedge n} - X_{M\wedge n}$.

Assim, em particular para $n = N$ temos $Y_N = X_N - X_{M\wedge N} = X_N - X_M$ e usando que Y_n é submartingal, $\mathbb{P}(N \leq k) = 1$ e que N é tempo de parada temos pelo Teorema 5.4.1 que

$$\mathbb{E}(Y_N) = \mathbb{E}(X_N - X_M) \geq \mathbb{E}(Y_0) = 0 \implies \mathbb{E}(X_N) \geq \mathbb{E}(X_M).$$

QUESTÃO 4.4: Seja $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, onde os $\xi_{i's}$ são independentes, $|\xi_i| \leq K$, $\mathbb{E}(\xi_i) = 0$, $\sigma_m^2 = \mathbb{E}(\xi_m^2) < \infty$ e $s_n^2 = \sum\limits_{m\leq n} \sigma_m^2$. O Exercício 5.2.6 implica que $S_n^2 - s_n^2$ é um martingal. Use isto e o Teorema 5.4.1 para concluir

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq m\leq n} |S_n| \leq x) \leq (x+K)^2/\mathrm{Var}(S_n).$$

Resolução: Sejam $A = \{\max\limits_{1\leq m\leq n} |S_n| > x\}$ e $N = \inf\{m; |S_m| > x \text{ } ou \text{ } m = n\}$. Sabendo que $S_n^2 - s_n^2$ é um martingal, N é tempo de parada e que $\mathbb{P}(N \leq n) = 1$ temos pelo Teorema 5.4.1 que $\mathbb{E}(S_1^2 - s_1^2) \leq \mathbb{E}(S_N^2 - s_N^2)$.

Como $\mathbb{E}(\xi_m) = 0$ e $\sigma_m^2 = \mathbb{E}(\xi_m^2) < \infty$ chegamos que $\mathrm{Var}(\xi_m) = \sigma_m^2$ para todo $m \in \mathbb{N}$, logo $\mathrm{Var}(S_m) = \mathbb{E}(S_m^2)$. Como os $\xi_{m's}$ são independentes temos que $\mathrm{Var}(S_n) = \sum\limits_{m\leq n} \mathrm{Var}(\xi_m) = \sum\limits_{m\leq n} \sigma_m^2 = s_n^2$ e também que $\mathbb{E}(S_1^2 - s_1^2) = \mathbb{E}(S_1^2) - s_1^2 = 0$.

Por outro lado, $\mathbb{E}(S_N^2 - s_N^2) = \mathbb{E}[(S_N^2 - s_N^2)\mathbb{I}_A] + \mathbb{E}[(S_N^2 - s_N^2)\mathbb{I}_{A^c}]$, mas em A sabemos que $|S_N| = |\xi_1 + \ldots + \xi_N| \leq |\xi_1 + \ldots + \xi_{N-1}| + |\xi_N| \leq (x + K)$ e usando que os $s_m^2 \geq 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ podemos escrever,

$$\mathbb{E}[(S_N^2 - s_N^2)\mathbb{I}_A] \leq \mathbb{E}[(S_N^2)\mathbb{I}_A] \leq \mathbb{E}[(|S_N|^2)\mathbb{I}_A] \leq \mathbb{E}[(x+K)^2\mathbb{I}_A] = (x+K)^2\mathbb{P}(A),$$

entre tanto em $A^c = \{\max\limits_{1\leq m\leq n} |S_n| \leq x\}$ temos que $N = n$, deste modo chegamos que $\mathbb{E}[(S_N^2 -$

$s_N^2)\mathbb{I}_{A^c}] \leq (x^2 - s_n^2)\mathbb{P}(A^c)$. Assim,

$$0 \leq \mathbb{E}(S_N^2 - s_N^2) \leq (x+K)^2\mathbb{P}(A) + (x^2 - s_n^2)\mathbb{P}(A^c).$$

Como $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$ substituindo na inequação acima,

$$\begin{aligned} 0 \leq (x+K)^2\mathbb{P}(A) + (x^2 - s_n^2)\mathbb{P}(A^c) &= (x+K)^2(1 - \mathbb{P}(A^c)) + (x^2 - \mathrm{Var}(S_n))\mathbb{P}(A^c) \\ &= (x+K)^2 + (x^2 - \mathrm{Var}(S_n) - (x+K)^2)\mathbb{P}(A^c). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (x+K)^2 &\geq -(x^2 - \mathrm{Var}(S_n) - (x+K)^2)\mathbb{P}(A^c) \\ &= (-x^2 + \mathrm{Var}(S_n) + x^2 + 2xK + K^2)\mathbb{P}(A^c) \\ &= (+\mathrm{Var}(S_n) + 2xK + K^2)\mathbb{P}(A^c) \quad (\text{como } \ x, K \geq 0) \\ &\geq \mathrm{Var}(S_n)\mathbb{P}(A^c) \end{aligned}$$

e portanto $\mathbb{P}(\{\max_{1\leq m\leq n} |S_n| \leq x\}) = \mathbb{P}(A^c) \leq (x+K)^2/\mathrm{Var}(S_n)$.

QUESTÃO 4.5: Seja X_n um martingal com $\xi_0 = 0$ e $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$. Mostre que

$$\mathbb{P}(\max_{1\leq m\leq n} X_n \geq \lambda) \leq \mathbb{E}(X_n^2)/(\mathbb{E}(X_n^2) + \lambda^2).$$

Dica: Use o fato que $(X_n + c)^2$ é um submartingal e otimize c.

Resolução: Para $c \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda + c > 0$ temos que se $x \in [\max_{1\leq m\leq n} X_n \geq \lambda]$ então $x \in [\max_{1\leq m\leq n}(X_n + c)^2 \geq (\lambda + c)^2]$. Logo, $[\max_{1\leq m\leq n} X_n \geq \lambda] \subset [\max_{1\leq m\leq n}(X_n + c)^2 \geq (\lambda + c)^2]$ e portanto,

$$\mathbb{P}([\max_{1\leq m\leq n} X_n \geq \lambda]) \leq \mathbb{P}([\max_{1\leq m\leq n}(X_n + c)^2 \geq (\lambda + c)^2]).$$

Com $(X_n + c)^2$ é um submartingal e $\max_{1\leq m\leq n}[(X_n + c)^2]^+ = \max_{1\leq m\leq n}(X_n + c)^2$ temos pela desigualdade de Doob

$$\mathbb{P}([\max_{1\leq m\leq n}(X_n + c)^2 \geq (\lambda + c)^2]) \leq \frac{\mathbb{E}((X_n + c)^2)}{(\lambda + c)^2} = \frac{\mathbb{E}(X_n^2) + c^2}{(\lambda + c)^2},$$

onde a igualdade decorre do fato de $\mathbb{E}(X_n) = 0$.

Considere $f(c) = \frac{\mathbb{E}(X_n^2)+c^2}{(\lambda+c)^2}$ para $c \neq -\lambda$, e calculando a derivada de f temos $f'(c) = \frac{2(c\lambda-\mathbb{E}(X_n^2))}{(\lambda+c)^3}$ e fazendo $f'(c) = 0$ obtemos $c = \frac{\mathbb{E}(X_n^2)}{\lambda}$. Calculando f'' e aplicando em $c = \frac{\mathbb{E}(X_n^2)}{\lambda}$ obtemos que $f''(c) = \frac{2\lambda^2-\mathbb{E}(X_n^2)}{(\lambda+\mathbb{E}(X_n^2)/\lambda)^4}$. Observando que $\lambda > -c = -\frac{\mathbb{E}(X_n^2)}{\lambda}$ então $\lambda^2 > -\mathbb{E}(X_n^2)$ e portanto, $f''(c) > 0$, assim c é ponto de mínimo. Logo,

$$\mathbb{P}([\max_{1\leq m\leq n}(X_n+c)^2 \geq (\lambda+c)^2]) \leq \frac{\mathbb{E}(X_n^2)+(\mathbb{E}(X_n^2)/\lambda)^2}{\lambda+(\mathbb{E}(X_n^2)/\lambda)^2} = \mathbb{E}(X_n^2)/(\mathbb{E}(X_n^2)+\lambda^2).$$

QUESTÃO de Sala: Assuma $\mathbb{P}(X_1 = a) = 1$. Mostre que $I(a) = 0$ e $I(z) = +\infty$ se $z \neq 0$, onde $I(z) = \sup_{t\in\mathbb{R}}[tz - \log\varphi(t)]$, $\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{tX_1}) < +\infty$.

Resolução: Como $\log\varphi(t) = \log\mathbb{E}(e^{tX_1}) = \log\mathbb{E}(e^{at}) = \log e^{at} = at$, onde a segunda igualdade decorre do fato de que $\mathbb{P}(X_1 = a) = 1$. Assim, temos que

$$I(a) = \sup_{t\in\mathbb{R}}[ta - \log\varphi(t)] = \sup_{t\in\mathbb{R}}[ta - at] = 0.$$

Por outro lado, para $z \neq a$ temos $I(z) = \sup_{t\in\mathbb{R}}[tz - \log\varphi(t)] = \sup_{t\in\mathbb{R}}[(z-a)t]$. Caso $(z-a) > 0$ temos que $(z-a)t \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ e caso $(z-a) < 0$ temos que $(z-a)t \xrightarrow[t\to-\infty]{} +\infty$. Daí concluímos que $I(z) = \sup_{t\in\mathbb{R}}[(z-a)t] = +\infty$.

QUESTÃO de Sala: Calcule o $I(z)$ para os processos de Poisson, Exponencial e Normal.

Resolução: Pelo que já fizemos na **questão 11 do capítulo 6 da Lista II de Probabilidade** se $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, onde $\lambda > 0$ temos, $\mathbb{E}(e^{tX_1}) = e^{\lambda(e^t-1)}$. Assim,

$$I(z) = \sup_{t\in\mathbb{R}}[tz - \log\varphi(t)] = \sup_{t\in\mathbb{R}}[tz - \log e^{\lambda(e^t-1)}] = \sup_{t\in\mathbb{R}}[tz - \lambda(e^t-1)].$$

Observe que se $h(t) = tz - \lambda(e^t - 1)$ então $h'(t) = z - \lambda e^t = 0$ se, e só se, $t = \ln(z/\lambda)$ para $z \neq 0$. Mas $h''(t) = -\lambda e^t < 0$ para todo t, então $t = \ln(z/\lambda)$ é ponto de máximo de h, logo $I(z) = \sup_{t\in\mathbb{R}}[tz - \lambda(e^t-1)] = h(\ln(z/\lambda)) = z\ln(z/\lambda) - z + \lambda$.

Ainda pela **questão 11 do capítulo 6 da Lista II de Probabilidade** se $X \sim \exp(\lambda)$, onde $\lambda > 0$ temos que $\mathbb{E}(e^{tX_1}) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$ se $t < \lambda$, $\mathbb{E}(e^{tX_1}) = +\infty$ se $t \geq \lambda$. Assim,

$$I(z) = \sup_{t\in\mathbb{R}}[tz - \log\varphi(t)] = \sup_{t\in\mathbb{R}}[tz - \log\mathbb{E}(e^{tX_1})].$$

Assim, para $t < \lambda$, $I(z) = \sup_{t\in\mathbb{R}}[tz - \log\dfrac{\lambda}{\lambda - t}]$. Seja $h(t) = tz - \log\mathbb{E}(e^{tX_1})$, como $h'(t) = z$ se $t \geq \lambda$ e $h'(t) = z - \frac{1}{\lambda - t}$ se $t < \lambda$. Assim, $h'(t) = 0$ se $t = \lambda - 1/z$ para $t < \lambda$ e $z \neq 0$ e $h'(t) = 0$ se $z = 0$ e $t \geq z$, como $h''(t) = -\frac{1}{(\lambda-t)^2} < 0$ se $t < \lambda$ temos $t = \lambda - 1/z$ é ponto de maximo para todo $z > 0$. Logo, $I(z) = \lambda z - \log(\lambda z) - 1$ para $z > 0$.

Se $X \sim N(0,1)$ então X têm densidade $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, assim

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{tx}e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{tx-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(2tx-x^2)/2}}{\sqrt{2\pi}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{t^2/2}e^{-(x-t)^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-t)^2/2}dx \quad (\text{para } u = (x-t)) \\
&= \frac{e^{t^2/2}}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2/2}du = \frac{e^{t^2/2}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = e^{t^2/2}.
\end{aligned}$$

Assim, $I(z) = \sup_{t\in\mathbb{R}}[tz - \log\varphi(t)] = \sup_{t\in\mathbb{R}}[tz - \log e^{t^2/2}] = \sup_{t\in\mathbb{R}}[tz - t^2/2]$.

Novamente defina $h(t) = tz - t^2/2$, como $h'(z) = 0$ se, e só se, $t = z$ e $h''(t) = -1$ temos que $t = z$ é ponto de maximo logo $I(z) = z^2 - \frac{z^2}{2} = \frac{z^2}{2}$.

Capítulo 5

Lista V - (Não solicitada)

QUESTÃO 3.13: Suponha que cada família tem exatamente 3 filhos mas lança moedas para determinar. Em 1800 uma família só passará seu sobrenome para os filhos homens. Seguindo o processo de ramificação com $p_o = 1/8$, $p_1 = 3/8$, $p_2 = 3/8$ e $p_3 = 1/8$. Calcule a probabilidade ρ que a família tenha seu sobrenome ser extinto quando $Z_0 = 1$.

Resolução: Sabemos que se $u_n = \mathbb{P}(X_n = d;\ X_0 = 1)$ então $\mathbb{P}(X_n = 0\ |X_0 = k) = u_n^k$. Daí,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = 1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_1 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \mathbb{P}(X_{n-1} = 0 \mid X_0 = k) \quad \text{(pois os } \xi_i \text{ são i.i.d.)} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \mathbb{P}(X_{n-1} = 0 \mid X_0 = 1)^k \\
&= \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\mathbb{P}(X_{n-1} = 0 \mid X_0 = 1) + \frac{3}{8}\mathbb{P}(X_{n-1} = 0 \mid X_0 = 1)^2 + \frac{1}{8}\mathbb{P}(X_{n-1} = 0 \mid X_0 = 1
\end{aligned}$$

Passando o limite e fazendo $n \longrightarrow +\infty$ obtemos,

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8}\rho + \frac{3}{8}\rho^2 + \frac{1}{8}\rho^3.$$

Calculando as raizes desse polinômio de terceiro grau obtemos, $\rho = 1$, $\rho = -2 - \sqrt{5}$ e $\rho = -2 + \sqrt{5}$. Note que $\mathbb{E}(X_n) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} > 1$ então (por teorema visto em sala) $\rho \neq 1$ e como $\rho = -2 - \sqrt{5} < 0$, concluímos que $\rho = -2 + \sqrt{5}$.

QUESTÃO 4.7: Sejam X_n, Y_n, $n \geq 0$, martingais com $\mathbb{E}(X_n^2), \mathbb{E}(Y_n^2) < \infty$. Então

$$\mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0) = \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})(Y_m - Y_{m-1})].$$

Resolução: Como,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})(Y_m - Y_{m-1})] &= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})Y_m - (X_m - X_{m-1})Y_{m-1})] \\
&= \sum_{m=1}^{n} (\mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})Y_m] - \mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})Y_{m-1}]) \\
&= \text{(pelo Teo. 5.4.6., } \mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})Y_{m-1}] = 0 \ \ \forall 1 \leq m \leq n) \\
&= \sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})Y_m] \\
&= \sum_{m=1}^{n} [\mathbb{E}(X_m Y_m) - \mathbb{E}(X_{m-1} Y_m)].
\end{aligned}$$

Usando que $\mathbb{E}(X_n^2), \mathbb{E}(Y_n^2) < \infty$ temos pela desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\mathbb{E}(|X_{m-1} Y_m|) \leq (\mathbb{E}|X_{m-1}|^2 \cdot \mathbb{E}|Y_m|^2)^{1/2} < \infty$$

e como X_m, Y_m são martingais temos que

$$\mathbb{E}(X_{m-1}Y_m) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_{m-1}Y_m|\mathfrak{F}_{m-1})] = \mathbb{E}[X_{m-1}\mathbb{E}(Y_m|\mathfrak{F}_{m-1})] = \mathbb{E}(X_{m-1}Y_{m-1}).$$

Assim, $\sum\limits_{m=1}^{n} \mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})(Y_m - Y_{m-1})] = \sum\limits_{m=1}^{n} [\mathbb{E}(X_m Y_m) - \mathbb{E}(X_{m-1}Y_{m-1})] = \mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0)$.

QUESTÃO 4.8: Sejam X_n, $n \geq 0$ martingais e considere $\xi_n = X_n - X_{n-1}$ para $n \geq 1$. Se $\mathbb{E}(X_0^2), \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_n^2) < \infty$ então $X_n \longrightarrow X_\infty$ quase certamente em L^2.

Resolução: Sabendo que $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_n^2) < \infty$ temos em particular que $\mathbb{E}(\xi_1^2) < \infty$, mas então $(X_1 - X_0) \in L^2$ e como por hipótese $X_0 \in L^2$ e usando que L^2 é espaço vetorial, concluímos que $X_1 - X_0 + X_0 = X_1 \in L^2$. Mas também temos que $\mathbb{E}(\xi_2^2) < \infty$ donde procedendo da mesma forma chegaremos que $X_2 \in L^2$, assim por indução concluímos $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$ para todo n. Deste modo podemos usar a questão 4.7 acima e escrever $\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X_0^2) + \sum\limits_{m=1}^{n} \mathbb{E}(\xi_n^2)$, passando o supremo em ambos os lados obtemos que

$$\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X_0^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_n^2) < \infty.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência de Martingais em L^p concluímos que $X_n \longrightarrow X_\infty$ quase certamente em L^2.

QUESTÃO 5.1 (Não solicitada): Seja $\varphi \geq 0$ uma função qualquer com $\frac{\varphi(x)}{x} \longrightarrow \infty$ quando $x \longrightarrow \infty$, por exemplo, $\varphi(x) = x^p$ com $p > 1$, ou $\varphi(x) = x \log^+ x$. Se $\mathbb{E}(\varphi(|X_n|) \leq c$, $\forall n \in I$ então $\{X_n;\ n \in I\}$ é uniformemente integravel.

Resolução: Como $\varphi \geq 0$ e $\frac{\varphi(x)}{x} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \infty$ então existe $M > 0$ tal que $\varphi(x) > 0$ para todo $x > M$.

Seja $\varepsilon_M = \sup\left\{\frac{x}{\varphi(x)}:\ x > M\right\}$, para $n \in I$ temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X_n|\mathbb{I}_{[|X_n|>M]}) &= \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{\varphi(X_n)}\varphi(X_n)\mathbb{I}_{[|X_n|>M]}\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left(\varepsilon_M \varphi(X_n)\mathbb{I}_{[|X_n|>M]}\right) \\
&= \varepsilon_M \mathbb{E}\left(\varphi(X_n)\mathbb{I}_{[|X_n|>M]}\right) \\
&= c\varepsilon_M.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ então $\frac{x}{\varphi(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, e portanto $\varepsilon_M \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$. Assim,

$$\lim(\sup_{n\in I} \mathbb{E}(|X_n|\mathbb{I}_{[|X_n|>M]}) = 0.$$

QUESTÃO 7.1 (Não solicitada): Se $X_n \geq 0$ é um supermartingal então

$$\mathbb{P}(\sup X_n > \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}X_0}{\lambda}.$$

Resolução: Seja $N = \inf\{n;\ X_n \geq \lambda\}$, como N é tempo de parada, temos pelo Teorema 5.7.6 que, $\mathbb{E}(X_0) \geq \mathbb{E}(X_N)$, mas como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_N) &\geq \mathbb{E}(\lambda) = \mathbb{E}(\lambda\mathbb{I}_{[N<+\infty]}) + \mathbb{E}(\lambda\mathbb{I}_{[N=+\infty]}) \\
&\geq \mathbb{E}(\lambda\mathbb{I}_{[N<+\infty]}) = \lambda\mathbb{P}([N<+\infty]) = \lambda\mathbb{P}(\sup X_n > \lambda)
\end{aligned}$$