Prova 1 - MATD13 2015.1
Análise Funcional
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 3h30
Data 19/01/2015

Instruções: Interpretação do enunciado e conhecimento das definições fazem parte da avaliação. Não serão tiradas dúvidas durante a prova.

1. **[1,5pt]** Sejam $||\cdot||_1$ e $||\cdot||_2$ duas normas no espaço vetorial X que o tornam espaços de Banach. Mostre que se existe $C > 0$ tal que
$$||\xi||_1 \leq C\,||\xi||_2\,, \quad \forall \xi \in X\,,$$
então as duas normas são equivalentes.

2. **[2pt]** Mostre que todo espaço métrico completo que não possui pontos isolados é não-enumerável.

3. **[1,5pt]** Mostre que em um espaço normado $\mathcal{N}$ de dimensão infinita, qualquer subconjunto que contenha um aberto (não-vazio) não é compacto.

4. **[2pt]** Seja $T \in B(\mathcal{B}, \mathcal{B})$, com $\|T\| < 1$. Mostre que o operador definido pela série $S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$ pertence a $B(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ e que $S = (1-T)^{-1}$.

5. **[3pt]** Sejam (X, d) espaço métrico compacto e $A : X \to X$ tal que para todos $\xi, \eta \in X$, $\xi \neq \eta$, vale $d(A(\xi), A(\eta)) < d(\xi, \eta)$.
   (a) Seja $f : X \to \mathbb{R}$, $f(\xi) = d(A(\xi), \xi)$. Mostre que f assume um valor mínimo global e que esse valor é zero. Conclua que A possui algum ponto fixo.
   (b) Mostre que o ponto fixo de A é único.
   (c) Seja $\xi \in X$ qualquer. Mostre que a sequência $\big(f(A^n(\xi))\big)_{n\geq 1}$ é descrescente (logo convergente).
   (d) Mostre que se $\tilde{\eta} \in X$ é ponto de aderência de $\big(A^n(\xi)\big)_{n\geq 1}$, então $A(\tilde{\eta})$ também é ponto de aderência.
   (e) Mostre que $f(\tilde{\eta}) = f(A(\tilde{\eta}))$ e conclua que $\tilde{\eta}$ é ponto fixo.
   (f) Mostre que para todo $\xi \in X$, $\big(A^n(\xi)\big)_{n\geq 1}$ converge ao ponto fixo.