



Prova 2 - MATD13 2015.1
Análise Funcional
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 3h30
Data 09/02/2015



Instruções: Interpretação do enunciado e conhecimento das definições fazem parte da avaliação. Não serão tiradas dúvidas durante a prova.

1. **[1pt]** Seja X espaço real com produto interno. Mostre que se $\|\xi\| = \|\eta\|$, então $\xi - \eta$ e $\xi + \eta$ são ortogonais.
2. **[1pt]** Mostre que se $T : \text{dom } T \subseteq N \rightarrow N$ é operador linear fechado, então o operador linear $T + \lambda 1$ é fechado para qualquer $\lambda \in \mathbb{F}$.
3. **[1,5pt]** Seja $\mathcal{B}$ espaço de Banach reflexivo. Mostre que para qualquer $f \in \mathcal{B}^*$, existe $\xi \in \mathcal{B}$ tal que $\|\xi\| = 1$ e $f(\xi) = \|f\|$.
4. **[1,5pt]** Se $\xi_n \rightharpoonup \xi$ no espaço de Banach $\mathcal{B}$, mostre que $\xi \in \overline{\text{Lin}(\{\xi_n\})}$. Conclua que existe uma sequência de combinações lineares de ξ_n que converge fortemente a ξ .
5. **[1,5pt]** Seja $S_d : \ell^1(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^1(\mathbb{N})$, $S_d(\xi_1, \xi_2, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$ o operador shift à direita. Mostre que seu adjunto S_d^a é o shift à esquerda $S_e : \ell^\infty(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^\infty(\mathbb{N})$, $S_e(\beta_1, \beta_2, \dots) = (\beta_2, \beta_3, \dots)$.
6. **[1,5pt]** Mostre que se $T_n \xrightarrow{s} T$ e $S_n \xrightarrow{w} S$ em $B(\mathcal{B})$, então $S_n T_n \xrightarrow{w} ST$.
7. **[1,5pt]** Se E é subespaço de um espaço X com produto interno, mostre que $\eta \in E^\perp$ se, e somente se, $\|\eta - \xi\| \geq \|\xi\|$ para todo $\xi \in E$.
8. **[1,5pt]** Defina a topologia fraca* e enuncie o Teorema de Alaoglu.