



Prova 3 - MATD13 2015.1
Análise Funcional
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 3h30
Data 25/02/2015



Instruções: Interpretação do enunciado e conhecimento das definições fazem parte da avaliação. Não serão tiradas dúvidas durante a prova.

1. **[1,5pt]** Use a desigualdade de Bessel para mostrar que vale o Lema de Riemann-Lebesgue: para toda $\psi \in L^2[0, 2\pi]$, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} e^{-int} \psi(t) dt = 0.$$

2. **[1,5pt]** Se $T \in B(\mathcal{B})$, mostre que $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \lambda R_\lambda(T) = -1$.
3. **[1,5pt]** Seja $S : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ definido por $S(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, 0, \dots)$. Determine o operador adjunto (de Hilbert) de S .
4. **[1,5pt]** Dê condições necessárias e suficientes para que um operador de projeção ortogonal em um espaço de Hilbert seja compacto (e prove isso).
5. **[1,5pt]** Dada $T \in B_0(\mathcal{B})$, é possível que $T^{-1} \in B(\mathcal{B})$ e T tenha infinitos autovalores? Justifique que não ou dê exemplo que sim.
6. **[1,5pt]** Sejam E e F subespaços vetoriais fechados de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Determine quando $P_E + P_F$ é projeção ortogonal sobre algum espaço.
7. **[2pt]** Mostre que se T é auto-adjunto compacto positivo (positivo quer dizer que $\langle T\eta, \eta \rangle \geq 0$ para todo η), então existe S auto-adjunto compacto positivo tal que $T = S^2$.