Prova 1 - MAT562 2017.1
Probabilidade
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 3h. Data 21/04/2016

1) **[1 pt]** Seja $(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A_k \in \mathbb{A}$ eventos tais que $\mathbb{P}\big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^{\complement}\big) = 0$. Mostre que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\big) = 1$.

2) **[2 pt]** Sejam X, Y independentes com distribuição $\exp(\lambda)$, com $\lambda > 0$. Mostre que $\frac{X}{X+Y} \sim U[0,1]$.

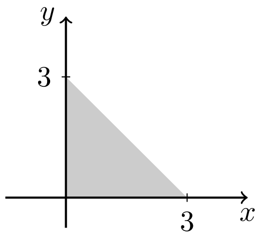
3) **[1 pt]** Uma lâmpada está acesa no tempo $t = 0$. Para $t > 0$, seja $Q(t + \Delta t|t)$ a probabilidade condicional da lâmpada queimar até $t + \Delta t$ dado que estava acesa no tempo t. Suponha que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t|t)}{\Delta t} = \lambda t\,.$$

Seja X = tempo em que a lâmpada queima. Mostre que $X \sim \exp(\lambda)$.

4) **[2 pt]** Seja X variável aleatória com distribuição $U[a, b]$. Faça o gráfico da função de distribuição da variável aleatória $Y = \max\{X, \frac{a+b}{2}\}$. Decomponha esta função de distribuição em suas partes absolutamente contínua, discreta e singular.

5) **[2 pt]** Um ponto (X, Y) é escolhido uniformemente na região em cinza abaixo. a) Encontre a densidade da variável aleatória Y/X. b) As variáveis X e Y são independentes? Justifique.



6) **[2 pt]** Jairo e Pedro são os monitores do curso de Probabilidade, e têm comportamentos aleatórios. Com probabilidade p, Jairo escreve um memorando a Pedro. Caso tenha sido escrito, este memorando é entregue ao Carteiro 1, que perde este memorando com probabilidade $1 - p$, e o repassa ao Carteiro 2 com probabilidade p. O Carteiro 2, por sua vez, perde o memorando com probabilidade $1 - p$, e o repassa ao Carteiro 3 com probabilidade p, e assim por diante, até o Carteiro n, que perde o memorando com probabilidade $1 - p$, e o repassa a Pedro com probabilidade p.

a) Dado que Pedro não recebeu nenhum memorando, calcule a probabilidade de que Jairo tenha-o escrito.

b) Suponha agora que $p = p(n) = 1 - \frac{1}{n}$. Calcule o limite da resposta do item anterior quando $n \to \infty$.