1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	
6ª	

Prova 2
Mat. Discreta
MATA42 2018.1
Prof. Tertuliano Franco
Data 24/07/2018

Instruções: justifique suas respostas. Cada questão vale dois pontos. Duração: 1h50. A prova pode ser feita à lápis.

Nome do aluno: ____________________

1ª) Prove por indução que $7^n - 6n - 1$ é múltiplo de 36 para $n \geq 1$.

Solução: para $n = 1$, temos que $7^1 - 6 \cdot 1 - 1 = 0$ que é múltiplo de 36. Suponha que, para um certo n, $7^n - 6n - 1 = 36k$. Multiplicando a igualdade por 7, temos que

$$\begin{aligned}
& 7^{n+1} - 6n \cdot 7 - 7 = 36 \cdot 7 \cdot k \\
\Rightarrow\ & 7^{n+1} - 6n \cdot (6+1) - (6+1) = 36 \cdot 7 \cdot k \\
\Rightarrow\ & 7^{n+1} - 36n - 6n - 6 - 1 = 36 \cdot 7 \cdot k \\
\Rightarrow\ & 7^{n+1} - 6n - 6 - 1 = 36 \cdot 7 \cdot k + 36n \\
\Rightarrow\ & 7^{n+1} - 6(n+1) - 1 = 36(7 \cdot k + n).
\end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução, a afirmação é válida para todo $n \geq 1$.

2ª) Prove, usando o Binômio de Newton, que $7^n - 6n - 1$ é múltiplo de 36 para $n \geq 1$.
Solução:

$$\begin{aligned}
7^n - 6n - 1 &= (6+1)^n - 6n - 1 \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 6^k \cdot 1^{n-k}\right] - 6n - 1 \\
&= \binom{n}{0} 6^0 \cdot 1^n + \binom{n}{1} 6^1 \cdot 1^{n-1} + \left[\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 6^k \cdot 1^{n-k}\right] - 6n - 1 \\
&= 6n + 1 + \left[\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 6^k \cdot 1^{n-k}\right] - 6n - 1 \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 6^k \cdot 1^{n-k} = 6^2 \cdot \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 6^{k-2}
\end{aligned}$$

3ª) Prove que em qualquer conjunto S de 77 inteiros há um subconjunto $R \subseteq S$ com pelo menos 5 elementos tais que a diferença de quaisquer dois elementos em R é divisível por 19.

Solução: Considere $A_0, \ldots, A_{19}$ os conjuntos definidos por $x \in A_i$ se, e somente se, x é inteiro e deixa resto i na divisão por 19. Como são 19 conjuntos e 77 inteiros, pelo PCP generalizado, algum conjunto conterá pelo menos 5 inteiros. E se $x, y \in A_i$, então $x = 19q_1 + i$ e $y = 19q_2 + i$, logo $x - y = 19(q_1 - q_2)$, ou seja, $x - y$ é múltiplo de 19.

4ª) Resolva a recorrência

$$\begin{cases} a_n = -3a_{n-1} + 2, \\ a_0 = -1\,. \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{aligned}
a_n &= -3a_{n-1} + 2 = (-3)(-3a_{n-1} + 2) + 2 \\
&= (-3)^2 a_{n-2} + 2(-3) + 2 \\
&= (-3)^2(-3a_{n-3} + 2) + 2(-3) + 2 \\
&= (-3)^3 a_{n-3} + 2(-3)^2 + 2(-3) + 2 \\
&\vdots \\
&= (-3)^n a_0 + 2(-3)^{n-1} + 2(-3)^{n-2} + 2(-3)^{n-3} + \cdots + 2(-3)^1 + 2(-3)^0 \\
&= -(-3)^n + 2\Big[(-3)^{n-1} + (-3)^{n-2} + (-3)^{n-3} + \cdots + (-3)^1 + (-3)^0\Big] \\
&= -(-3)^n + 2\frac{(-3)^n - 1}{(-3) - 1} \\
&= -(-3)^n - \frac{(-3)^n - 1}{2} = \frac{(-3)^{n+1} + 1}{2}
\end{aligned}$$

5ª) Prove, por um argumento combinatório, que

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}.$$

Solução: Basta contar o número de comissões de $k + 2$ pessoas escolhidas de um total de $n + 2$ pessoas. Uma resposta é $\binom{n+2}{k+2}$. Para obter outra resposta, fixe duas pessoas, que chamaremos de A e B. Há quatro tipos de comisssões:

- As que têm A e B, cujo total é $\binom{n}{k}$.
- As que tem A e não têm B, cujo total é $\binom{n}{k+1}$.
- As que não tem A e têm B, cujo total é $\binom{n}{k+1}$.
- As que não tem A nem B, cujo total é $\binom{n}{k+2}$.

Logo,

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}.$$

6ª) **Extra 1pt** Um algoritmo pode ser entendido como um manual de instruções (finito) para resolver um determinado problema. O conjunto de todos os algoritmos é enumerável ou não-enumerável? **Solução:** Seja A_n o conjunto dos algoritmos com n símbolos e seja A o conjunto de todos os algoritmos. Temos que $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Como A_n é finito, temos que A é enumerável.