Prova 1 - MAT518 2018.2
Análise no $\mathbb{R}^n$
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 2h15

Instruções: cada questão vale 2 pontos. A prova pode ser feita à lápis.

1) Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$ que provenha de um produto interno. Suponha que $\|b-c\|+\|c-a\| = \|b-a\|$. Mostre que $c \in [a,b]$.

Solução: Suponha por absurdo que c não pertence à $[a,b]$. Temos dois casos, ou c não pertence à reta que contém $[a,b]$ ou c pertence à reta que contém $[a,b]$ mas está fora do segmento $[a,b]$. No segundo caso, ou $\|b-c\| > \|b-a\|$ ou $\|c-a\| > \|b-a\|$. Em qualquer um desses sub-casos, é impossível que $\|b-c\|+\|c-a\| = \|b-a\|$. Consideremos o segundo caso, no qual $b-c$ e $c-a$ não são múltiplos um do outro.

Pela bilinearidade e simetria do produto interno,

$$\|b-a\|^2 = \|(b-c)+(c-a)\|^2 = \|b-c\|^2 + 2\langle b-c, c-a\rangle + \|c-a\|^2$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, como $b-c$ e $c-a$ não são múltiplos, o lado direito acima é *estritamente menor* do que

$$\|b-c\|^2 + 2\|b-c\|\cdot\|c-a\| + \|c-a\|^2 = \big(\|b-c\|+\|c-a\|\big)^2$$

que é igual a $\|b-a\|^2$ pela hipótese no enunciado. Logo, chegamos a $\|b-a\|^2 < \|b-a\|^2$, contradição.

2) Seja $A:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ transformação linear injetiva. Prove que existe $c>0$ tal que $\|Ax\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Solução: Suponha por absurdo que não existisse tal constante. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe x_n tal que $\|Ax_n\| < \frac{1}{n}\|x_n\|$. Em particular, $x_n \neq 0$, pois A é linear. Defina $y_n = x_n/\|x_n\|$. Assim,

$$\|Ay_n\| < \frac{1}{n} \tag{1}$$

eq1

e y_n pertence à esfera unitária. Como a esfera unitária é compacta, existe subsequência $y_{n_k} \to y \in S[0,1]$. Como a norma é contínua, de (1) deduzimos que $\|Ay\| = 0$, que implica que $y=0$ pois A é injetiva. O que é uma contradição dado que $y \in S[0,1]$.

3) Mostre que $X \subset \mathbb{R}^n$ é denso se, e somente se, $X^\complement$ tem interior vazio.

Solução: Suponha X é denso e considere $y \in X^\complement$. Mostremos que y não pertence ao interior de $X^\complement$. Dada uma bola $B(y,\varepsilon)$, existe $x \in X$ tal que $x \in B(y,\varepsilon)$ pois X é denso. Logo, $y \notin \operatorname{int} X^\complement$, de onde deduzimos que $\operatorname{int} X^\complement = \varnothing$.

Suponha que $\operatorname{int} X^\complement = \varnothing$. Mostremos que X é denso. Para isso, basta provar que qualquer bola de $\mathbb{R}^n$ contém algum ponto de X. Seja $B(y,\varepsilon)$ uma bola.

Temos duas possibilidades: ou $y \in X$ ou $y \notin X$. No primeiro caso, a bola contém um ponto de X, que é o centro y da bola. Se $y \notin X$, então, como o interior do complementar de X é vazio, esta bola $B(y, \varepsilon)$ não pode estar inteiramente contida em $X^\complement$, ou seja, contém algum ponto de X.

4) Prove o Teorema de Baire:

a) Se $A_1, A_2, \ldots$ são abertos densos em $\mathbb{R}^n$, então $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso.

b) Se $F_1, F_2, \ldots$ são fechados com interior vazio em $\mathbb{R}^n$, então $\cup_{n=1}^{\infty} F_n$ tem interior vazio.

Solução: a) Basta mostrar que toda bola $B(x, \varepsilon)$ em $\mathbb{R}^n$ contém algum ponto de $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Como A_1 é denso, existe $a_1 \in A_1 \cap B(x, \varepsilon)$. Como A_1 é aberto, existe $B[a_1, \varepsilon_1] \subset A_1 \cap B(x, \varepsilon)$. Analogamente, existe $B[a_2, \varepsilon_2] \subset A_2 \cap B[a_1, \varepsilon_1]$ e assim por diante. Logo, como a sequência $B[a_1, \varepsilon_1], B[a_2, \varepsilon_2], B[a_3, \varepsilon_3], \ldots$ é de compactos encaixados não-vazios, concluímos que existe $a \in \cap_{n=1}^{\infty} B[a_n, \varepsilon_n] \subset \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ pelo Teorema de Cantor. Como $a \in B(x, \varepsilon)$, concluímos que $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ é denso.

b) Basta notar que complementar de aberto é fechado e usar a questão **3)**.

5) Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é *topologicamente homogêneo* se, para quaisquer $a, b \in X$, existe um homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(a) = b$. Mostre que se X tem interior não-vazio e contém um ponto isolado, então X não é topologicamente homogêneo.

Solução: Seja b um ponto isolado de X e seja a um ponto interior. Suponha, por absurdo, que $h : X \to X$ seja homemorfismo tal que $h(a) = b$. Como a é ponto interior, existe $x_n \in X$ tal que $x_n \to a$ com $x_n \neq a$. Daí, $h(x_n) \to h(a) = b$. Como b é ponto isolado, para n suficientemente grande vale que $h(x_n) = b$, de onde concluímos que h não é bijeção, logo não é homeomorfismo.