Prova 2 - MAT518 2018.2
Análise no $\mathbb{R}^n$
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 2h
Data: 07/11/18

Gabarito resumido

1) Seja $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \langle Ax, By\rangle$, onde $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ e $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ são transformações lineares. Prove que f é diferenciável e encontre sua derivada.

Solução: calculando as derivadas parciais, temos que

$$\nabla f(x, y) = \big(\langle Ae_1, By\rangle, \dots, \langle Ae_m, By\rangle, \langle Ax, Be_{m+1}\rangle, \dots, \langle Ax, Be_{m+n}\rangle\big) .$$

Como as derivadas parciais existem e são contínuas, então f é diferenciável, e sua derivada será

$$df(x, y) \cdot u = \langle \nabla f(x, y), u\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle Ae_1, By\rangle u_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} \langle Ax, Be_i\rangle u_i$$

2) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Mostre que f não pode ser injetiva.

Solução via Teorema da Função Implícita:

Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ em todos os pontos, então f não pode ser injetiva, pois será localmente constante em y. Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ em algum ponto (x_0, y_0), então, pelo Teorema da Função Implícita, existem abertos A e B em $\mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $y_0 \in B$ e $g : A \to B$ tais que $f(x, g(x)) = c$ para todo $x \in A$. Como A é aberto não vazio, A contém $x_1 \neq x_0$. Logo, $f(x_1, g(x_1)) = c = f(x_0, g(x_0))$ e $(x_1, g(x_1)) \neq (x_0, g(x_0))$. Portanto, f não é injetiva.

Solução via Teorema da Função Inversa: Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ em todos os pontos, então f não pode ser injetiva, pois será localmente constante em y. Se $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ em algum ponto (x_0, y_0), então defina $g(x, y) = (x, f(x, y))$, cujo jacobiano é não nulo em (x_0, y_0). Pelo Teorema da Função Inversa, existem abertos A e B em $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$ tais que $g : A \to B$ é difeomorfismo C^1.

Seja $c = f(x_0, y_0)$ e seja também $(x_1, c) \in B$ tal que $x_1 \neq x_0$. Como g é bijeção, $g^{-1}(x_0, c) \neq g^{-1}(x_1, c)$ que implica que f não é injetiva.

3) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $f(x/2) = f(x)/2$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Prove que f é uma transformação linear.

Solução: $f(0/2) = f(0)/2$ implica $f(0) = 0$. Por indução, $f(x/2^n) = f(x)/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como f é diferenciável em zero,

$$f(v) = f(0) + Tv + r(v), \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^m ,$$

com $\lim_{v\to 0} r(v)/\|v\| = 0$. Em particular,

$$f\Big(\frac{x}{2^n}\Big) = \frac{1}{2^n}Tx + r\Big(\frac{x}{2^n}\Big), \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

que leva a

$$f(x) = Tx + \|x\|\frac{r(\frac{x}{2^n})}{\frac{\|x\|}{2^n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Tomando o limite em n concluímos que $f(x) = Tx$.

4) Considere em $\mathbb{R}^m$ a norma euclidiana $\|\cdot\|$. Seja $f : \mathbb{R}^m - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|^a$, com $a \in \mathbb{R}$. Mostre que f é diferenciável e $df(x)\cdot v = a\|x\|^{a-2}\langle x, v\rangle$.

Solução: basta encontrar as derivadas parciais e observar que estas são contínuas.

5) Considere em $\mathbb{R}^m$ a norma euclidiana $\|\cdot\|$. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \|x\|^a$, com $a \geq 0$. Sob quais condições a função f é diferenciável em $x = 0$?

Solução:

1º Caso: $a = 0$. Neste caso, f é constante, logo diferenciável em zero.

2º Caso: $a \in (0, 1)$. Neste caso, não existe a derivada direcional em zero $\lim_{t\to 0} \frac{f(tv)-f(0)}{t}$, logo f não é diferenciável em zero.

3º Caso: $a = 1$. Neste caso, não existe a derivada direcional em zero $\lim_{t\to 0} \frac{f(tv)-f(0)}{t}$, logo f não é diferenciável em zero.

4º Caso: $a > 1$. Neste caso, as derivadas parciais em zero são nulas. Como o limite das derivadas parciais quando $x \to 0$ é igual a zero (veja a questão anterior) concluímos que f é diferenciável em zero (pois as derivadas parciais existem e são contínuas).