Prova 3 - MAT518
2018.2
Análise no $\mathbb{R}^n$
Prof. Tertuliano Franco
Duração: 2h
Data: 20/12/18

1ª	
2ª	
3ª	
4ª	

Gabarito Resumido

1) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um retâgulo fechado. Prove ou dê contra-exemplo:

(a) Se um conjunto $C \subset A$ tem conteúdo nulo, então χ_C é integrável e $\int_A \chi_C = 0$.

(b) Se um conjunto $C \subset A$ tem medida nula, então χ_C é integrável e $\int_A \chi_C = 0$.

Solução: (a) Seja $\varepsilon > 0$. Cubra C com retângulos cuja soma dos volumes é menor do que ε. Obtenha uma partição P de A a partir destes retângulos e mostre que $U(\chi_C, P) \leq \varepsilon$. (b) Falso. Considere C como o conjunto dos racionais em $[0,1]$, que tem medida nula pois é enumerável, mas χ_C não é integrável pois seu conjunto de pontos de descontinuidade é $[0,1]$.

2) Demonstre, para $f : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, que

$$\int_a^b \int_a^y f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_a^b \int_x^b f(x,y)\,dy\,dx\,.$$

Solução: Considere a função $g : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,y) \;=\; f(x,y)\chi_C(x,y)\,,$$

onde $C = \{(x,y) \in [a,b] \times [a,b] : y \leq x\}$. Temos que g é integrável pois seu conjunto de pontos de descontinuidade é a fronteira de C, que tem medida nula. Aplicando o Teorema de Fubini, chegamos na igualdade acima.

3) Sejam $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ vetores linearmente independentes. Demonstre que $v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$, nessa ordem, é uma base com orientação positiva. E se considerarmos uma permutação destes vetores, qual será a orientação?

Solução: Temos, pela definição de produto vetorial, que $\det[v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1 \times \cdots \times v_{n-1}] = \langle v_1 \times \cdots \times v_{n-1}, v_1 \times \cdots \times v_{n-1} \rangle > 0$, logo esta base tem orientação positiva. Se considerarmos uma permutação destes vetores, como o determinante é um tensor alternado, a base obtida será positiva se a permutação for par e será uma base negativa se a permutação for ímpar.

4) Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

Seja A a matriz dos coeficientes, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

e seja B_i a matriz obtida a partir da matriz A substituindo a i-ésima coluna da matriz A pelo vetor coluna

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Suponha que $\det A \neq 0$. Prove a chamada *Regra de Cramer*: a solução do sistema (1) é dada por

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Solução: Denote

$$a(i) = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix}, \forall\, i = 1, \ldots, n \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Temos que

$$\det B_i = \det[a(1), \ldots, a(i-1), b, a(i+1), \ldots, a(n)].$$

Por (1), temos que $b = x_1 a(1) + \cdots + x_n a(n)$. Como o determinante é uma função multilinear que vale zero em vetores linearmente dependentes, temos que

$$\det B_i = x_i \det[a(1), \ldots, a(i-1), a(i), a(i+1), \ldots, a(n)] = x_i \det A.$$