Prova 2
Mat. Discreta
MATA42 2019.1
Prof. Tertuliano Franco
Data 04/07/2019

1ª	
2ª	
3ª	
4ª	
5ª	

Instruções: justifique suas respostas. Cada questão vale dois pontos. Duração: 1h50. A prova pode ser feita à lápis.

Nome do aluno: ____

1ª) Resolva:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \\ a_0 = 1 \\ a_1 = 7 \end{cases}$$

Resposta: método da equação característica. Equação característica: $x^2 - 2x - 3 = 0$. Raízes: $3, -1$. Daí, resolvendo o sistema, obtemos $a_n = 2 \cdot 3^n - (-1)^n$.

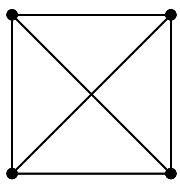
2ª) Quantos são os múltiplos de 2, 5 ou 11 menores ou iguais a 11000?

Resposta:

$$\frac{11.000}{2} + \frac{11.000}{5} + \frac{11.000}{11} - \frac{11.000}{2\cdot 5} - \frac{11.000}{2\cdot 11} - \frac{11.000}{5\cdot 11} + \frac{11.000}{2\cdot 5\cdot 11} = 7.000$$

3ª) É possível que, numa determinada rede, existam 99 usuários, e que cada usuário esteja conectado a exatamente 3 outros usuários? E for uma rede com quatro usuários?

Resposta: Não. Cada usuário é um vértice, cada conexão é uma aresta. Daí, $99 \cdot 3 = 2 \cdot |A|$ é impossível, pois o membro esquerdo é ímpar e o membro direito é par. Se forem quatro usuários, é possível, veja o grafo abaixo:



4ª) Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 + 3k^2 + k$. **Resposta:** Fazendo

$$k^3 + 3k^2 + k \;=\; A\frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + B\frac{k(k-1)}{2!} + C\frac{k}{1!} + D$$

obtemos $A = 6$, $B = 12$, $C = 5$ e $D = 0$. Aplicando o Teorema das Colunas, chegamos a

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + 3k^2 + k \;=\; 6\binom{n+1}{4} + 12\binom{n+1}{3} + 5\binom{n+1}{2}.$$

5ª) Responda, justificando, quais são enumeráveis e quais não são enumeráveis:

(a) $[0, 1/2]$. Não-emunerável, basta fazer a bijeção $f(x) = x/2$, $f : [0, 1] \to [0, 1/2]$.

(b) O conjunto dos números primos. Emunerável, pois está contido em $\mathbb{N}$.

(c) O conjunto das sequências binárias infinitas. Não-enumerável, argumento diagonal.

(d) O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Não-enumerável, pois contém $\mathbb{R}$.