



Prova 1
Teoria da Medida
MAT505 2020.2
Prof. Tertuliano Franco
Data 30/01/2020



1 ^a	
2 ^a	
3 ^a	
4 ^a	
5 ^a	
6 ^a	
7 ^a	

Instruções: justifique suas respostas. Cada questão vale 1,5 pontos. Duração: 1h50. A prova deve ser feita à caneta.

Nome do aluno: _____

- 1) Seja $\mathbb{B}$ a σ -álgebra de Borel em $\mathbb{R}$, ou seja, a σ -álgebra gerada pelos intervalos da forma (a, b) , com $a < b$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $\mathbb{B}$ é igual à σ -álgebra gerada pelos intervalos da forma $(-\infty, b]$, com $b \in \mathbb{R}$.
- 2) Dê exemplo de uma função f tal que f não é mensurável, mas f^+ é.
- 3) Considere λ a medida de Lebesgue na σ -álgebra de Borel $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}$. Mostre que todo subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$ é mensurável e tem medida nula.
- 4) Mostre que, se $f \in M^+(X, \mathbb{X})$ e $\int f d\mu < +\infty$, então $\mu(\{x \in X : f(x) = +\infty\}) = 0$.
- 5) Mostre que a condição $|f_n| \leq g$, g integrável, não pode ser retirada do enunciado do Teorema da Convergência Dominada.
- 6) Mostre que $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \lambda) \not\subseteq L^2(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \lambda)$ e também que $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \lambda) \not\subseteq L^1(\mathbb{R}, \mathbb{B}, \lambda)$.
- 7) (*Desigualdade de Paley-Zygmund*) Seja $(X, \mathbb{X}, \mu)$ espaço de medida de probabilidade. Seja f função mensurável, $f \geq 0$ tal que $f \in L^p(X, \mathbb{X}, \mu)$ e f não é nula μ -q.t.p. Mostre que, para quaisquer p, q tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $p > 1$, vale que

$$\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) \geq \frac{\left(\int f d\mu\right)^q}{\left(\int f^p d\mu\right)^{\frac{q}{p}}}$$

Dica: aplique a desigualdade de Hölder à função $f\chi_E$, onde $E = \{x \in X : f(x) > 0\}$.